NOM POUPA

Prénom Adrien

Promo L'3 2018

Date 3/03/2016

		1	8	,	

POUPA Adrien
L3PRIME - 2015

$\frac{18}{25}$

1/2

MATIÈRE Optimisation et complexité

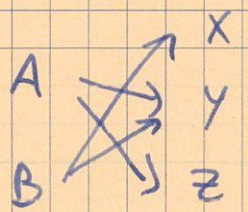
Exercice 1

La solution proposée est

	X	Y	Z
A	0	3	2
B	4	1	0

D'où on tire
$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 7 \\ u_1 + v_3 = 8 \\ u_2 + v_1 = 4 \\ u_2 + v_2 = 6 \end{cases} \quad (S)$$

4 équations, 5 inconnues



Le graphe étant connexe, la solution n'est pas dégénérée.

On pose $u_1 = 0$, $(S) \iff \begin{cases} v_2 = 7 \\ v_3 = 8 \\ v_1 = 5 \\ u_2 = -1 \end{cases}$

D'où $d_{11} = a_{11} - (u_1 + v_1)$

$d_{11} = 5 - (0+5)$

$d_{11} = 0$

et $d_{23} = a_{23} - (u_2 + v_3)$

$d_{23} = 9 - (-1 + 8)$

$d_{23} = 2$

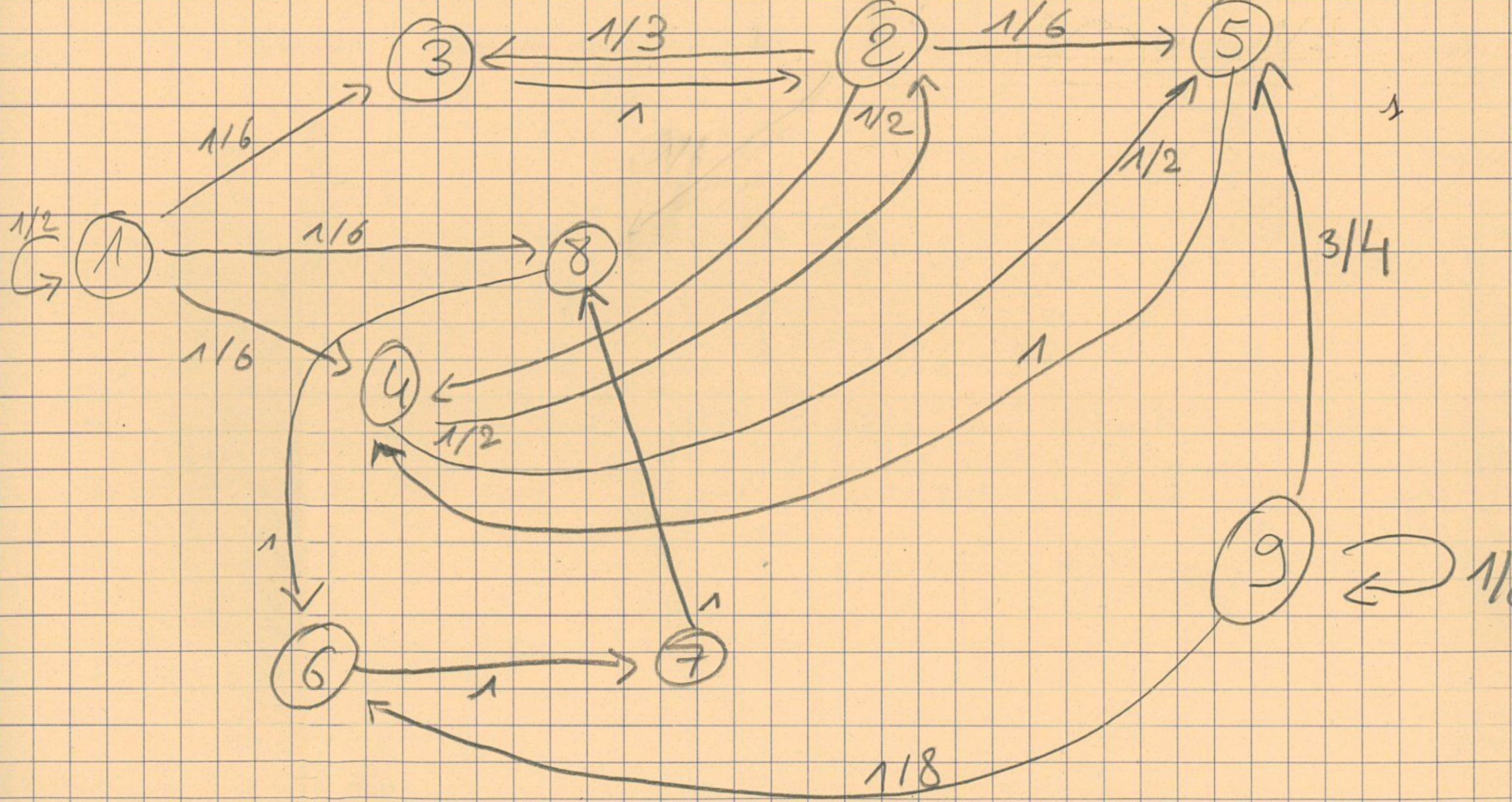
Comme $d_{11} \geq 0$ et $d_{23} \geq 0$, la solution proposée est optimale.

2. Si elle ne l'était pas, c'est-à-dire si on avait eu un d_{ij} à coût négatif, on aurait du envoyer plus d'unités depuis ce fournisseur, en retrancher à un autre fournisseur plus cher et recommencer jusqu'à avoir tous les $d_{ij} \geq 0$

Exercice 2

6

1) Graphe :



a) Les composantes connexes sont :

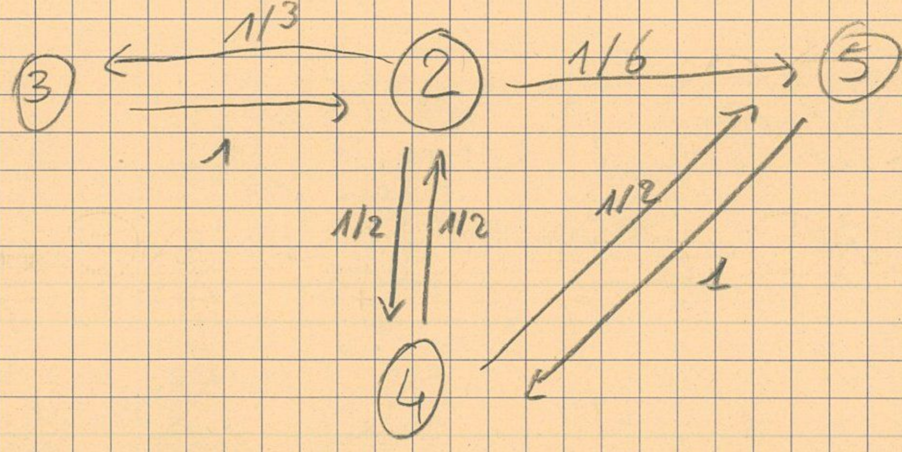
$\{1\}, \{9\}, \{6\,7\,8\}, \{2\,3\,4\,5\}$ 1

b) Les classes transitoires sont : $\{1\}, \{9\}$

Les classes persistantes sont : $\{6\,7\,8\}, \{2\,3\,4\,5\}$

2/2

c) Considérons $\{2\,3\,4\,5\}$:



2

$\{2345\}$ est apériodique : pour partir et revenir à 5, on peut effectuer 3 étapes ou 5 étapes, or $PGCD(3, 5) = 1$.

D'où la période de $\{2345\}$ est 1, d'où $\{2\,3\,4\,5\}$ est apériodique.

À l'infini, on aura "Π_∞" $= (P(X_\infty = 2), P(X_\infty = 3), P(X_\infty = 4), P(X_\infty = 5))$

avec "Π_∞" $= (a, b, c, d)$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}^4$

déterminables comme suit :

$$\begin{cases} (a, b, c, d) \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (a, b, c, d) \\ a+b+c+d = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + \frac{1}{2}c = a \\ \frac{1}{3}a = b \\ \frac{1}{2}a + d = c \\ \frac{1}{6}a + \frac{1}{2}c = d \\ a+b+c+d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3}a \\ \frac{1}{2}c = a - \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a \\ \frac{1}{2}a = c - d \\ d = \frac{1}{6}a + \frac{1}{2}c \\ a+b+c+d = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3}a \\ c = \frac{4}{3}a \\ a = 2c - 2d \\ d = \frac{1}{6}a + \frac{2}{3}a = \frac{5}{6}a \\ a+b+c+d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3}a \\ c = \frac{4}{3}a \\ d = \frac{5}{6}a \\ a = a \\ a+b+c+d = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{6}{63} \\ c = \frac{24}{63} \\ d = \frac{30}{126} \\ a = \frac{6}{21} \end{cases}$$

D'où $\boxed{\text{"}\Pi_\infty\text{"} = \left(\frac{6}{21}, \frac{6}{63}, \frac{24}{63}, \frac{30}{126}\right)}$ 1

18
6
24
48
63

$\frac{45}{126}$ 3

A Saught

NOM POUPA

Prénom Adrien

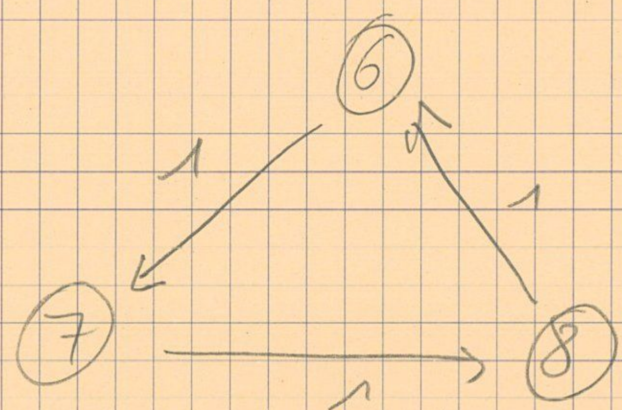
Promo L'3 2018

Date 3/03/2016

2/2

MATIÈRE Optimisation et complexité

c) Considérons $\{6\ 7\ 8\}$:



$\{6\ 7\ 8\}$ est de $\boxed{\text{période } 3}$.

En effet, pour aller d'un point et revenir à ce même point, on doit effectuer 3, 6, 9 itérations...
et PGCD$(3, 6) = 3$.

1

$$\begin{cases} (a,b,c)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (a,b,c) \\ a+b+c=1 \end{cases} \iff \begin{cases} c=a \\ a=b \\ b=c \\ a+b+c=1 \end{cases}$$

...

Au final, on a $\pi_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\pi_1 = \pi_0 P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et $\pi_2 = \pi_1$, $\pi_3 = \pi_2$, etc

et $\boxed{\text{"}\pi_\infty\text{"} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$ avec équiprobabilité des événements

Exercice 3

Soit :
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ (x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$$

On veut maximiser $f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2 + 10$.

On paramétrise

On a
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + y_1 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 + y_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 + y_3 \leq 6 \\ (x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = 2 - x_1 + 2x_2 \\ y_2 = 2 + x_1 - x_2 \\ y_3 = 6 + x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

On a $(0, 0, 2, 2, 6)$.

On fait rentrer x_1 dans la base.

y_1 sort de la base.

$$\iff \begin{cases} x_1 = 2 - y_1 + 2x_2 \\ y_2 = 2 + 2 - y_1 + 2x_2 = 4 - y_1 + 2x_2 \qquad \underline{4} \\ y_3 = 6 + 2 - y_1 + 2x_2 - 2x_2 = 8 - y_1 \end{cases}$$

$f = 2 - y_1 + 2x_2 - 2x_2 + 10$

$f = 12 - y_1$

On a $(2, 0, 0, 4, 8)$.

f possède un maximum sur D : $\boxed{(2, 0, 0, 4, 8)}$

On procède façon similaire pour g :

$$\begin{cases} y_1 = 2 - x_1 + 2x_2 \\ y_2 = 2 + x_1 - x_2 \\ y_3 = 6 + x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

On a $(0, 0, 2, 2, 6)$.

$g(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 + 10$.

On fait rentrer x_1 dans la base.

y_1 sort de la base.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - y_1 + 2x_2 \\ y_2 = 4 - y_1 + 2x_2 \\ y_3 = 8 - y_1 \end{cases}$$

$g = 4 - 2y_1 + 4x_2 + x_2 + 10$

$g = 14 - 2y_1 + 5x_2$ On a $(2, 0, 0, 4, 8)$

x_2 rentre dans la base.

x_1 sort de la base.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = x_1 - 2 + y_1 \\ \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} + x_1 + y_1 \\ y_2 = 4 - y_1 + x_1 - 2 + y_1 \\ y_3 = 8 - y_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} + x_1 + y_1 \\ y_2 = 2 + x_1 \\ y_3 = 8 - y_1 \end{cases}$$ On a $(0, -\frac{1}{2}, 0, 2, 8)$

$g = 14 - 2y_1 + 5(-\frac{1}{2} + x_1 + y_1) = \frac{23}{2} + 3y_1 + 5x_1$

La base a un point non admissible.

g n'admet pas de maximum sur D.