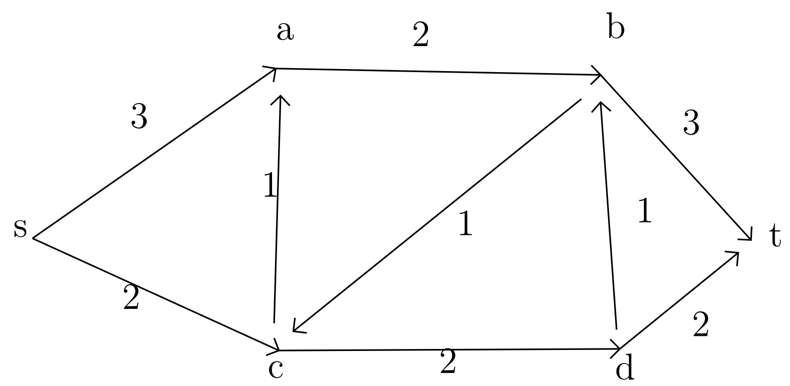
Recherche de Flot maximal dans un graphe

1. Optimiser la circulation

Soit le réseau de routes qui relie la ville de South-North à la plage de Tous-al'eau (entre parenthèses les capacités, c'est à dire le nombre maximal de véhicules par heure)



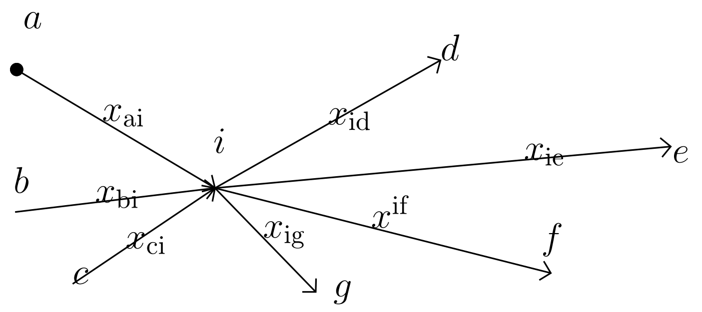
Le but est de faire traverser ce réseau par la plus grande quantité de véhicules par heure.

On désigne les sommets de ce graphe par des lettres ou des nombres, les arêtes par des couples (on considère seulement des graphes orientés, c'est à dire des voies à sens unique).

On désigne les capacités des arcs par des nombres;

Pour chaque arc (i,j) on désignera par c_{ij} sa capacité (nombre maximum de véhicules pouvant le traverser) et par x_{ij} la quantité de véhicules qui le traverse.

1) Pour chaque sommet $i \in V \backslash \{S,t\}$ *le flot total entrant en* i, $\sum_{j \in V} x_{\text{ji}}$ est égal *au flot total sortant de* i,$\sum_{j \in V} x_{\text{ij}}$



$$\sum_{j \in V} x_{\text{ji}} = \sum_{j \in V} x_{\text{ij}}$$

2) Pour chaque arc (i,j) $\in$ E la quantité x_{ij} est positive et limitée par la capacité c_{ij}

$$0 \leqslant x_{\text{ij}} \leqslant c_{\text{ij}}$$

On appellera valeur totale du flot v(x), qui vérifie $\left\{ \begin{array}{l} v(x) = \sum_{j \in V} x_{\text{sj}} \\ v(x) = \sum_{j \in V} x_{\text{jt}} \end{array} \right.$.

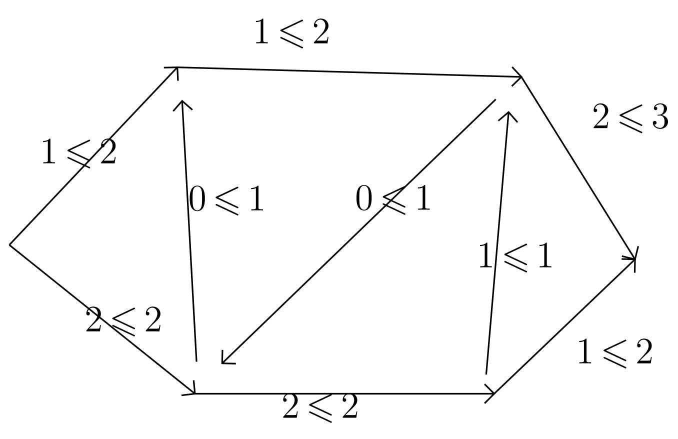
Ce que l'on peut résumer par : $\sum_{j \in V} x_{\text{ji}} - \sum_{j \in V} x_{\text{ij}} = \left\{ \begin{array}{l} -v, \text{si}\, i = s \\ 0, \text{si}\, i \neq s, \neq t \\ v, \text{si}\, i = t \end{array} \right.$.

(condition de flot)

Toute famille (x_{ij}) qui vérifie la condition de flot sera appelée un flot admissible et v sera appelé sa valeur.

Un flot sera dit maximal lorsque sa valeur est maximale parmi toutes les valeurs de flots admissibles

Exemple de flot de South-North à Tousa-l'eau

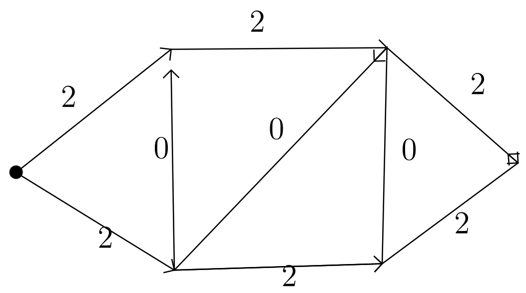


Question 1. *Comment trouver des flots ?*

Question 2. *Comment trouver un flot maximal ?*

Question 3. *Comment savoir s'il est maximal ?*

3) Ce flot n'est pas maximal car il existe un flot de valeur 4:



2. La trousse à outils

Définition 4. *Capacité résiduelle d'un arc, arc saturé, chemin saturé, flot complet*

Soit un flot sur le graphe G=(V,E) , de capacités (c_{ij})

1. on appelle ***capacité résiduelle*** *de l'arc (i,j) le réel* $c_{\text{ij}-}x_{\text{ij}}$

2. une arête (i,j) est dit ***saturée*** *pour le flot* φ*=*(x_{ij}) *lorsque* x_{ij}*=*c_{ij} *et insaturée lorsque* x_{ij}*=0.*

3. un chemin (S,a_2*,...*a_p*,t) est dit* ***saturé*** *lorsque l'une au moins de ses arêtes est saturée.*

4. un flot est dit ***complet*** *lorsque tous les chemins de S à t sont saturés.*

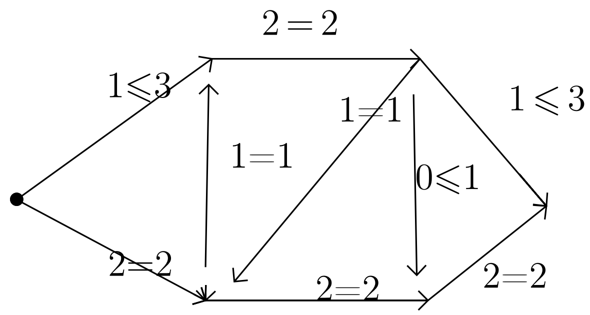
Remarque 5.

ATTENTION

IL NE SUFFIT PAS QUE « LE RESEAU AIT L'AIR BOUCHE » POUR ETRE MAXIMAL

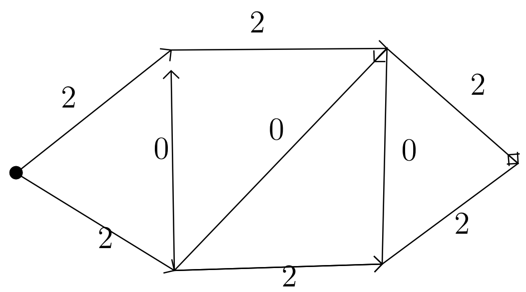
c'est-à-dire:

Un flot **complet peut ne pas être maximal** (comme le prouve l'exemple ci-dessous), mais un flot **maximal est nécessairement complet**



COMPLET   mais PAS MAXIMAL

Ce flot n'est pas maximal car il existe un flot de valeur 4:



3. Chaînes améliorantes pour un flot.

Définition 6.

Soit un flot (x_{ij}) *sur le graphe orienté G=(V,E), on appellera chaîne toute suite de sommets C=(S=*$a_1,a_2,..,a_{p-1},a_p$*=t) telle que pour tout* $j \in \{1, ..., p-1\}$ (a_j,a_{j+1}) *appartient à E (arête directe) ou* (a_{j+1},a_j) *appartient à E (arête indirecte).*

La chaîne (S=$a_1,a_2,..,a_{p-1},a_p$*=t) sera dite améliorante lorsque*

- pour toute arête directe (i,j) reliant deux sommets consécutifs de la chaîne $x_{\mathrm{ij}}<c_{\mathrm{ij}}$

- pour toute arête indirecte (i,j) reliant deux sommets consécutifs de la chaîne $x_{\mathrm{ij}}>0$*.*

Théorème 7. *Si un flot est maximal il n'admet pas de chaîne améliorante.*

Théorème 8. *Si un flot ne possède pas de chaîne améliorante il est maximal*

4. HORS-COURS Algorithme de Ford-Fulkerson

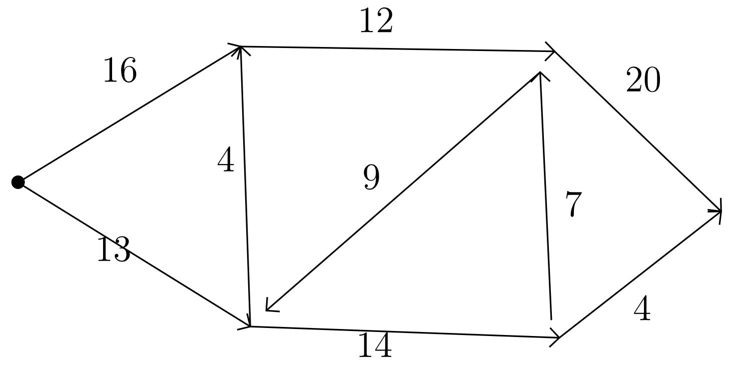
Soit le graphe G=(V,E).

On part d'un flot initial, noté f, par exemple nul (s'il n 'y a pas mieux pour commencer); on construit le graphe résiduel G_f , comme suit:

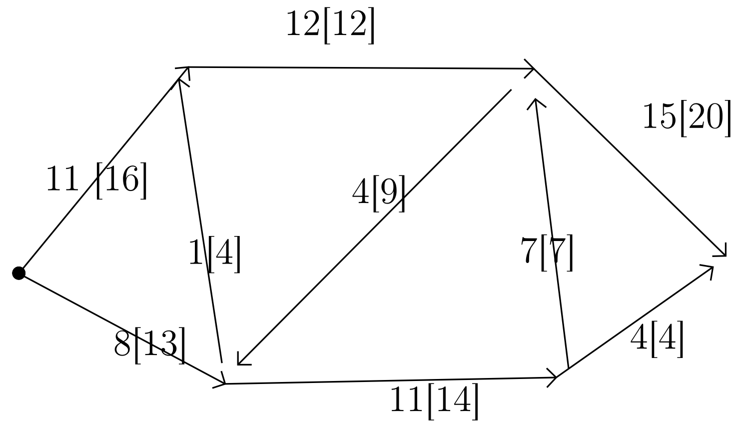
pour tout couple de sommets u,v (de V^2)

on pose $c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v), \text{si } (u,v) \in E \\ f(v,u), \text{si } (v,u) \in E \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$

Exemple **9.**



flot initial:

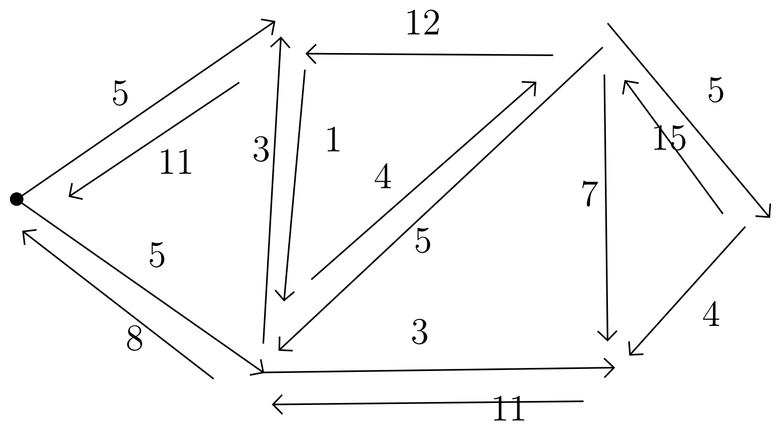


Le flot est complet

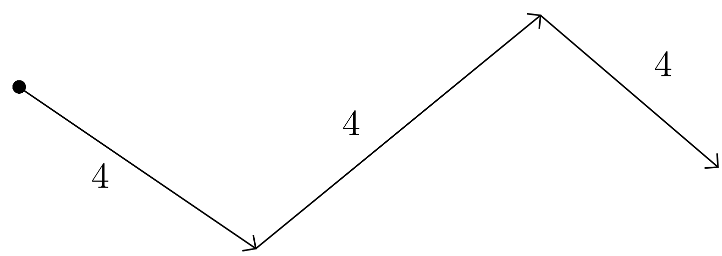
nous allons voir qu'il n'est pas maximal

; cela provient que nous avons « trop expédié » par certains chemins, et il faudra se « repentier », faire des « marche-arrière » pour mieux repartir.

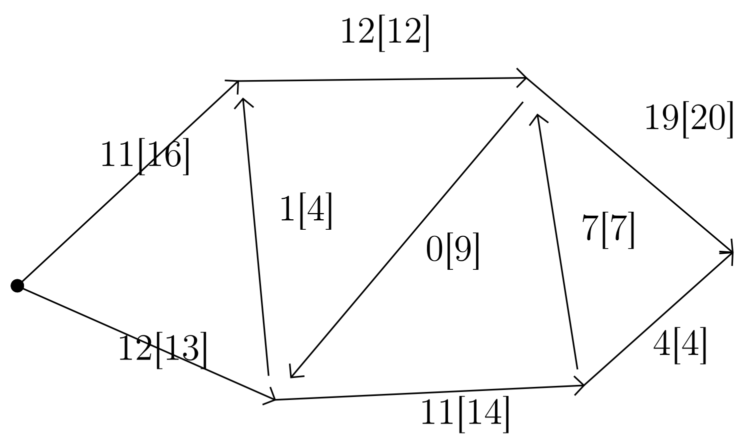
Graphe résiduel:



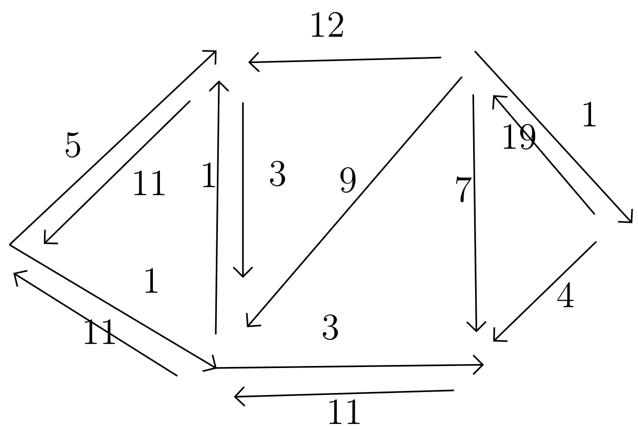
Chaîne améliorante:



Nouveau flot: (on superpose le flot initial et le flot augmentant)



Nouveau Graphe Résiduel:



il est difficile de voir si ce graphe résiduel tolère encore une augmentation de flot et donc si notre flot est maximal.

La complexité de l'algorithme de Ford-Fulkerson est O($|E|$ |valeur(flot max).}

5. (mon préféré) Algorithme d'Edmonds-Karp

plutôt que celui, classique, de Ford-Fulkerson, car il assure que chaque fois sera trouvé une chaine améliorante de longueur minimale, ce qui assure une complexité polynomiale (voir plus bas)

ALGORITHME

1) procédure principale

initialisation : flot nul.

répéter

fin=parcours ( )

si fin=1, alors retourner f

m=∞

u=t

tant que $u \neq s$

m=min(m,c(p[u],u)

u=p(u)

fin tant que

u=t

tant que $u \neq s$

f(p[u],u)= f(p[u],u)+m

c(p[u],u)=c(p[u],u)-m

c([u,p[u])=c(u,p[u])+m

u=p[v]

fin tant que

fin répéter

2) procédure parcours

initialisation: pour tous les sommets p(u)=-1

Q=[s]

tant que Q≠∅

u= dépiler Q

pour chaque v tel que (u,v) arête, c(u,v)>0 et p(v)=-1

p[v]=u

si v=t, alors retourner 1

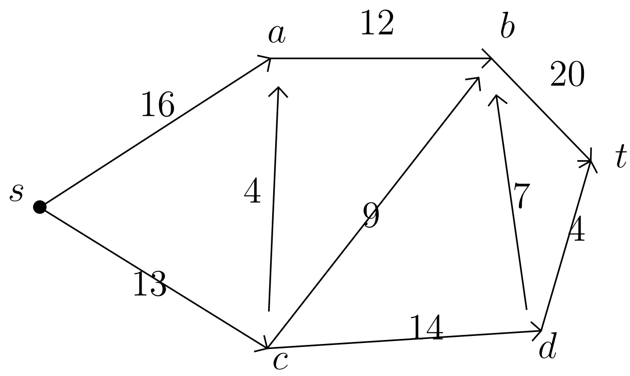
ajouter v à la fin de Q

fin pour

fin tant que

retourner 0.

ATTENTION A NE PAS OUBLIER D'INDIQUER LES CAPACITES DANS LES DEUX SENS DES LE DEBUT DE L'EXECUTION DE L'ALGORITHME



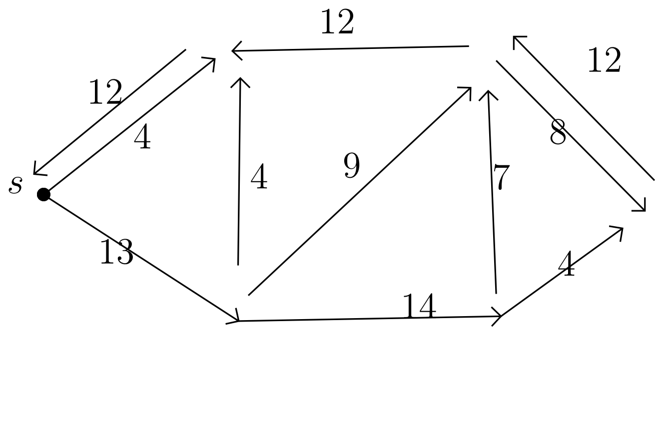
sac

ab

cd

bt d'où la première chaîne améliorante sabt, de flot 12

d'où le premier graphe résiduel



On recommence

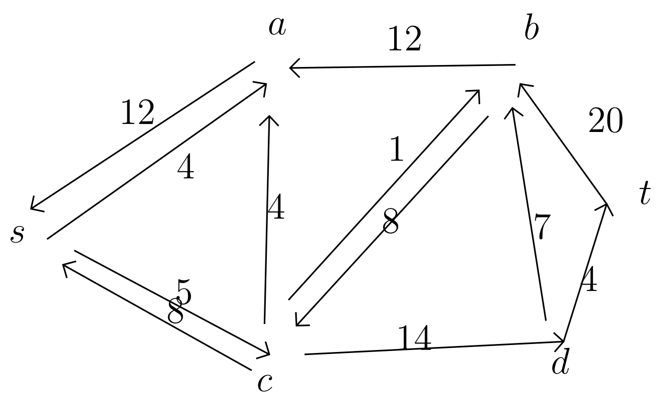
sac

a ∅

cbd

bt d'où la deuxième chaîne améliorante scbt de flot 8

et le graphe résiduel



à nouveau

sac

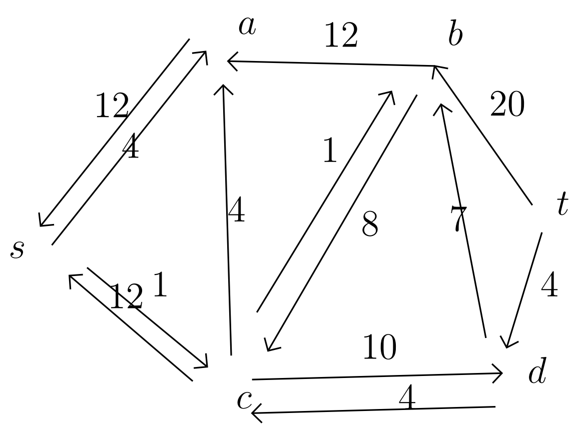
a ∅

cd

dt

d'où la chaîne améliorante scdt de flot 4;

nouveau graphe résiduel



maintenant

sac

a ∅

cdb

d ∅

b ∅

donc c'est fini

valeur du flot maximal: 12+8+4=24

La complexité de l'algorithme d'Edmonds-Karp est $0(|V||E|)$

Remarque 10. Capacités entières et flot maximal

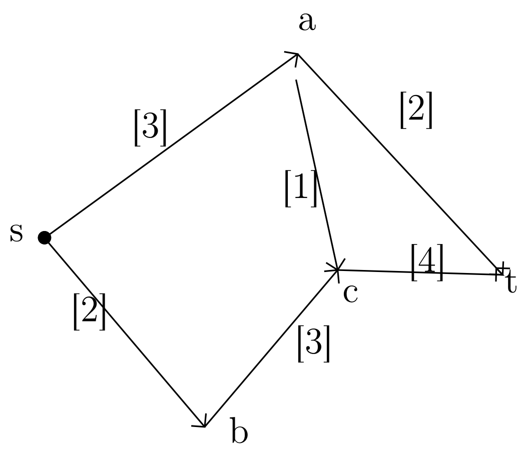
Si les capacités c_{ij} sont des entiers et si on part d'un flot nul toutes les améliorations consisteront à ajouter des **entiers** strictement positifs donc

1) la suite des valeurs des flots obtenus par l'algorithme d'Edmonds-Karp est une suite strictement croissante majorée donc stationnaire

2) D'où l'existence d'un flot maximal et le fait que sa valeur v et les x_{ij} sont des entiers.

Ceci signifie que dans les cas *concrets* (capacités entières) le flot maximal est atteint.

Problème 1. Déterminer un flot maximal pour le graphe ci-dessous, à l'aide l'algorithme d'Edmonds-Karp



6. S'il reste du temps:Algorithme de Pousser-Réétiqueter

Sa complexité sera meilleure : $O(|V|^2|E|)$.

La différence avec les précédents: on ne part pas d'un flot initial mais d'un pré-flot et on n'aboutira à un flot qu'à la fin.

Définition 11. *préflot sur un graphe et excédent en un sommet*

on retire la condition de Kirchoff $\sum_{j \in V} x_{\mathrm{ji}} - \sum_{j \in V} x_{\mathrm{ij}} = \begin{cases} -v, \mathrm{si}\, i = s \\ 0, \mathrm{si}\, i \neq s, \neq t \\ v, \mathrm{si}\, i = t \end{cases}$

on la remplace par $\forall i \in V, \sum_{j \in V} f(j, i) - \sum_{j \in V} f(i, j) \geqslant 0$ *(il peut arriver au sommet i plus qu'il en partira).*

L' excédent du sommet i sera e(i)=$\sum_{j \in V} f(j, i) - \sum_{j \in V} f(i, j) \geqslant 0$*; si l'excédent du sommet i est strictement positif on dira qu'il est excédentaire.*

Définition 12. *Graphe résiduel d'un préflot*

c'est le graphe muni des capacités résiduelles (comme dans le cas d'un flot); on le notera G_f *et l'ensemble de ses arêtes, important ici, sera noté* E_f.

Définition 13. *fonction de hauteur dans un graphe*

soit un préflot f sur le graphe G=(V,E)

ce sera une fonction h de $V \longrightarrow \mathbb{N}$*, telle que h(s)=*$|V|$*, h(t)=0 et* $\forall (i, j) \in E_f, h(i) \leqslant h(j) + 1$.

Les trois procédures de l'algorithme

Initialisation d'un préflot:

1. pour chaque sommet v de G

   h(v):=0; e(v):=0.

2. pour chaque arête (u,v)

f(u,v):=0

3. h(s):=$|V|$

4. pour chaque sommet v tel que (s,v)$\in E$

f(s,v):=c(s,v)

e(v):=c(s,v)

e(s):=e(s)-c(s,v)

Réétiquetage du sommet u

si u est excédentaire et si $\forall v, (u,v) \in E_f, h(u) \leqslant h(v)$

h(u):=1+min$\{h(v), (u,v) \in E_f\}$

Pousser sur l'arc (u,v)

si u est excédentaire, si c_f(u,v)>0 et si h(u)=h(v)+1

$\Delta_f(u,v) := \min\left(e(u), c_f(u,v)\right)$;

si (u,v)$\in E$

f(u,v)=f(u,v)+$\Delta_f(u,v)$

si (v,u)$\in E$

f(u,v):=f(u,v)-$\Delta_f(u,v)$

e(u):=e(u)-$\Delta_f(u,v)$

e(v):=e(v)+$\Delta_f(u,v)$.

L'algorithme de Pousser-réétiqueter:

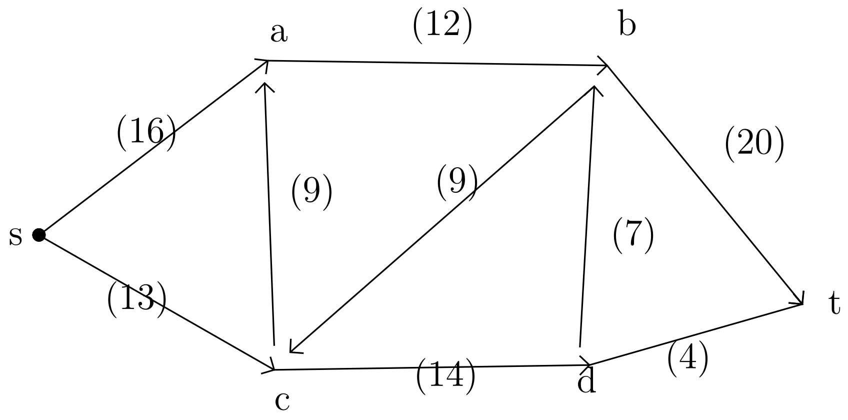
Initialiser un préflot

tant qu'il existe une possiblité de pousser ou de réétiqueter

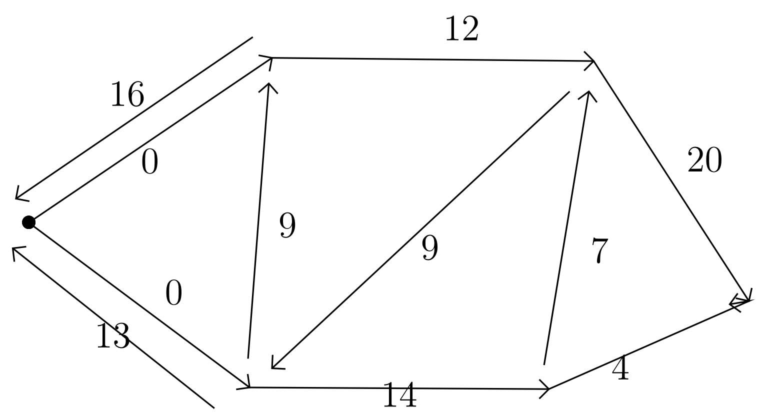
choisir une poussée possible ou un réétiquetage possible et l'exécuter.

Pousser-réétiqueter

Données: ci-dessous les capacités:



1. On initialise le préflot à 16 sur (sa) et 13 sur (sc); d'où le graphe résiduel



sommets	hauteurs
s	6
a,b,c,d,t	0

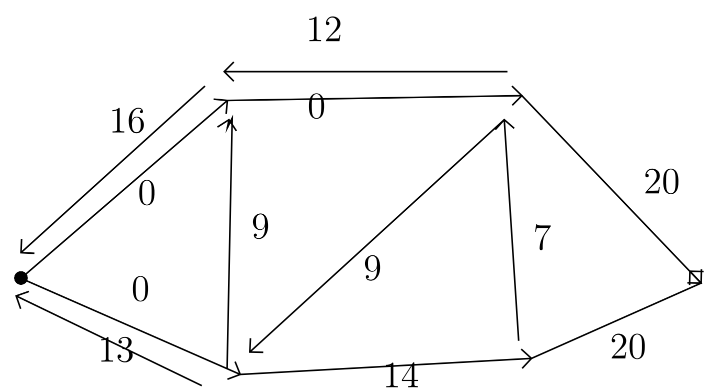
sommets	excès
a	16
b	0
c	13
d	0

2. on rétiquette a : hauteur 1 et on pousse 12 sur (ab)

sommets	hauteurs
s	6
a	1
b,c,d,t,	0

sommets	excès
a	4
b	12
c	13
d	0

d'où le graphe résiduel



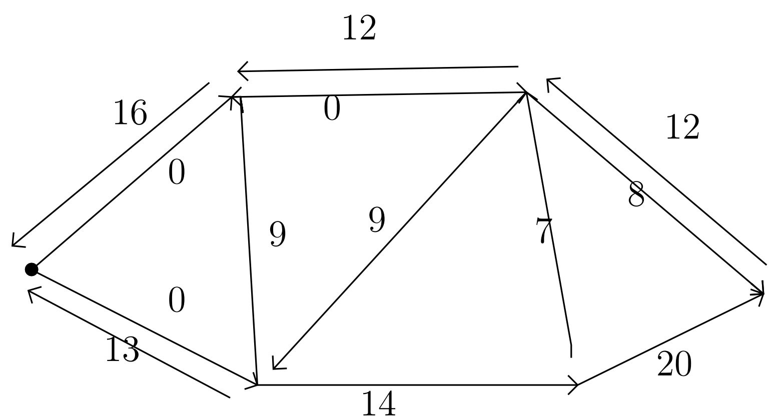
on réétiquette b

sommets	hauteurs
s	6
a,b	1
c,d,t,	0

et on pousse 12 sur (bt) d'où

sommets	excès
a	4
b	0
c	13
d	0

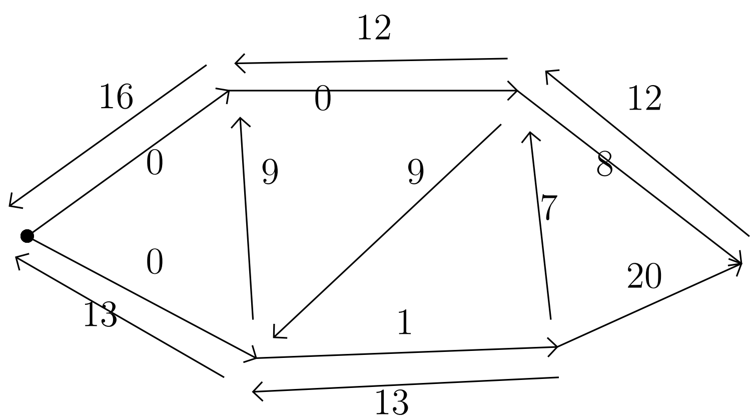
avec le graphe résiduel :



on réétiquette c	sommets	hauteurs	et on pousse 13 sur (ct) d'où
	s	6	
	a,b,c	1	
	d,t,	0	

sommets	excès
a	4
b	0
c	0
d	13

d'où le graphe résiduel



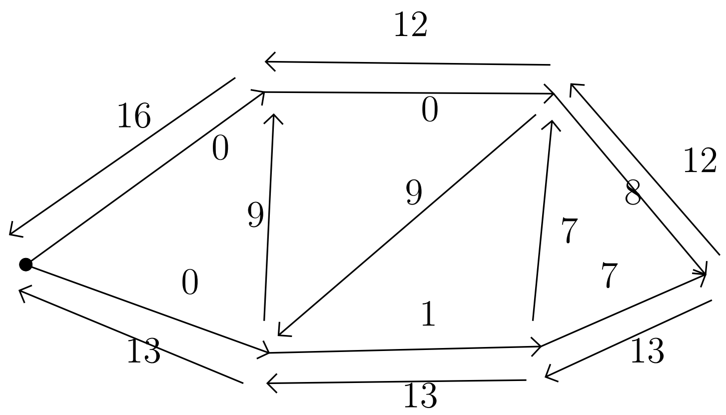
on réétiquette c

sommets	hauteurs
s	6
a,b,c,d	1
t,	0

et on pousse 13 sur (dt) d'où

sommets	excès
a	4
b	0
c	0
d	0

d'où le graphe résiduel :

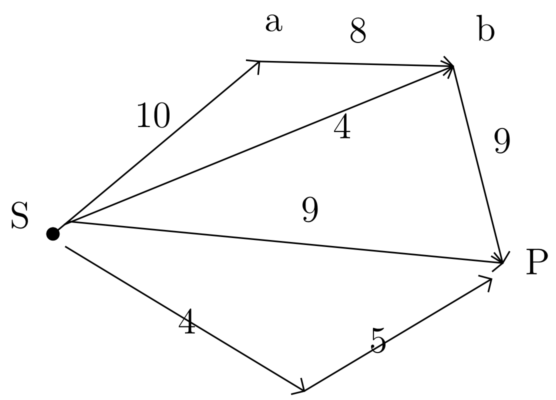


; le seul sommet en excès est a, le seul vers lequel il ait un chemin avec capacité résiduelle positive est s; il faut donc réétiqueter a à h(s)+1=7 et alors on pousse l'excédent de a (égal à 4 et inférieur à la capacité 16) vers s

il n'y a plus d'excédents; le préflot est devenu un flot

et l'algorithme s'achève: il est maximal.

Problème 2. Déterminer un flot maximal pour le graphe suivant (entre parenthèses les capacités)



Travaux dirigés-à préparer

Exercice 1. Flot maximal

Soit le réseau schématisé dans le tableau suivant:

(les nombres dans les cases signifient qu'il y a un arc et représentent les capacités)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2	13					
2				10	12			
3				5			6	
4					1	1		
5						6		
6							8	
7								12
8								

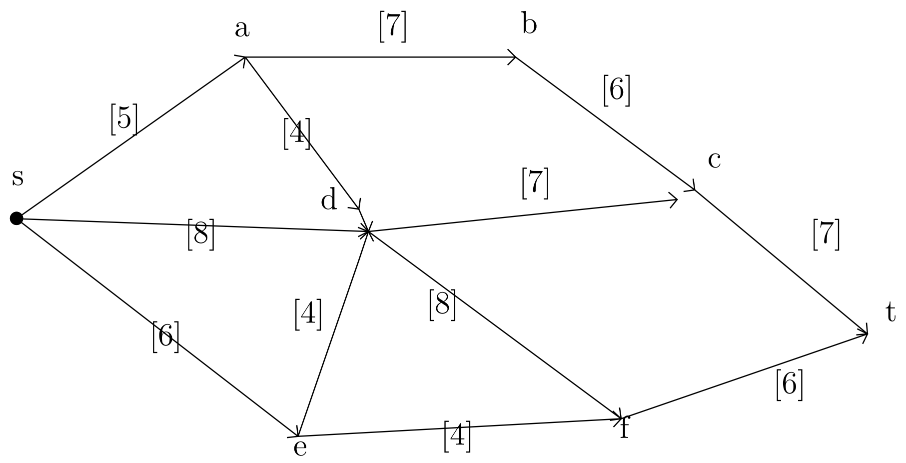
1. Déterminer le flot maximal par la méthode d'Edmunds-Karp et la coupe minimale associée.

2. Appliquer le pousser-réétiquetter.

3. Comparer.

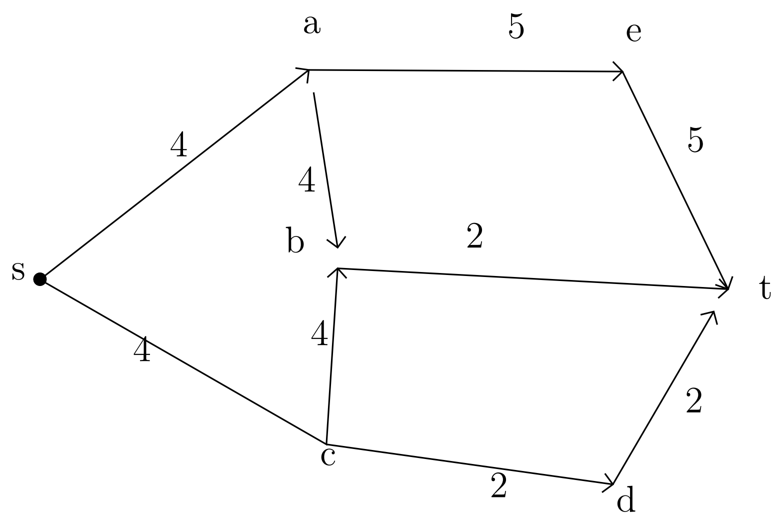
Exercice 2. Flot maximal

Déterminer un flot maximal sur le graphe ci-dessous; préciser sa valeur.



Exercice 3.

Déterminer un flot maximal (EdmondsKarp, Pousser-réétiqueter)



Exercice 4. Adduction d'eau

Trois villes J, K et L sont alimentées à partir de quatre ressources(nappes souterraines, usines de traitement,chateaux d'eaux) A, B, C et D. Les quantités journalières disponibles sont

A: 15.000 m^3; B: 10.000 m^3 C: 15.000 m^3 D: 15.000 m^3 (par la suite les quantités seront exprimées en Milliers de m^3).

Le tableau suivant donne les débits maximaux du réseau de distribution actuel, la case (i,j) représentant le débit maximal du point i au point j; chaque portion est bien entendu en « sens unique »:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A					7							
B	5					5						
C						10	7					
D							10					
E						5		4	15			
F							5		15			
G									15			
H										7		
I								7			30	4
J												
K										10		
L												

Une étude prospective a été menée et évalue les besoins journaliers comme suit:

J: 15.000 m^3; K: 20.000 m^3 L: 15.000 m^3.

1. Déterminer la valeur du flot maximal pouvant passer dans le réseau actuel et déterminer la coupe minimale correspondante.

2. La communauté de communes décide, le flot maximal étant insuffisant par rapport aux besoins prévus, de refaire les canalisations (A,E) et (I,L); déterminer les capacités à prévoir pour ces deux canalisations (en effet trop ce sera trop !) et le flot maximal ainsi permis par cette transformation.

3. Devant les frais que de tels travaux vont entraîner les autorités régionales décident de ne pas effectuer les travaux en même temps et d'effectuer les travaux en deux tranches; déterminer dans quel ordre les effectuer afin qu'après la première tranche il y ait déjà une première amélioration. Déterminer l'ordre dans lequel effectuer ces deux transformations et le flot maximal possible après la première étape.

6. Flot de coût minimal

On considère un graphe *orienté* G=(V,E) dans lequel peut circuler une ressource (eau, pétrole, etc...) depuis une *source* représentée par le sommet s vers un *puits* représenté par le sommet t; chaque portion du réseau, représentée par une arête (i,j), possède une capacité limitée, représentée par un réel strictement positif c_{ij} et le passage de chaque unité de flot par chaque arête entraîne un coût, représenté par un réel positif d_{ij}.

L'objectif est de déterminer un flot φ, de valeur donnée F pouvant être expédié depuis la source vers le puits à travers le réseau et de coût $\sum_{(i,j)\in E} d_{ij}x_{ij}$ minimal ; à cette fin on désignera pour chaque arête (i,j) le flot traversant cette arête par x_{ij}, qui est bien sûr soumis à la contrainte $0\leqslant x_{ij}\leqslant c_{ij}$; la conservation du flot impose pour chaque sommet $i \in V \Big\backslash \{s,\ t\}$ que *le flot total entrant en* i, $\sum_{j\in V} x_{ji}$, soit égal *au flot total sortant de* i, $\sum_{j\in V} x_{ij}$; tandis que *le flot total traversant le réseau*, qui sera désigné par v(φ), vérifie $\begin{cases} v=\sum_{j\in V} x_{sj} \\ v=\sum_{j\in V} x_{jt} \end{cases}$ et la condition $v(\varphi)=F$.

Ce que l'on peut résumer par : $\sum_{j\in V} x_{ji} - \sum_{j\in V} x_{ij} = \begin{cases} -F, \text{si}\, i=s \\ 0, \text{si}\, i\neq s, \neq t \\ F, \text{si}\, i=t \end{cases}$. (condition de flot) et $\sum_{(i,j)\in E} d_{ij}x_{ij}$ minimal.

En particulier on pourra, en combinant les deux algorithmes, déterminer le flot de valeur maximale et de coût minimal parmi les flots de cette valeur.

Description de la démarche:

0. On suppose un flot initial nul.

1. Représenter le graphe en attribuant à chaque arc (i,j) un couple de valeurs (c_{ij}, d_{ij}), la capacité et le coût unitaire.

2. Déterminer un chemin de coût **unitaire** minimal. (méthode « plus court chemin »)

3. Déterminer le maximum C des capacités des arcs constituant ce chemin flot maximal suivant ce chemin et définir le flot ayant cette valeur le long de ce chemin.

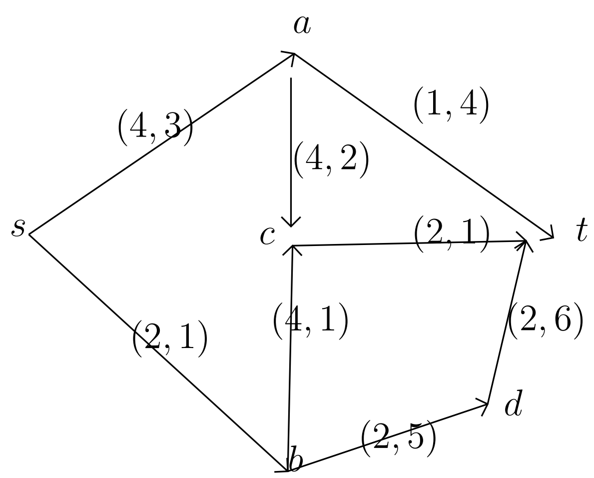
Ajouter ce flot au flot précédent.

Si la valeur du flot est égale à F, c'est fini; sinon le noter et passer à 4.

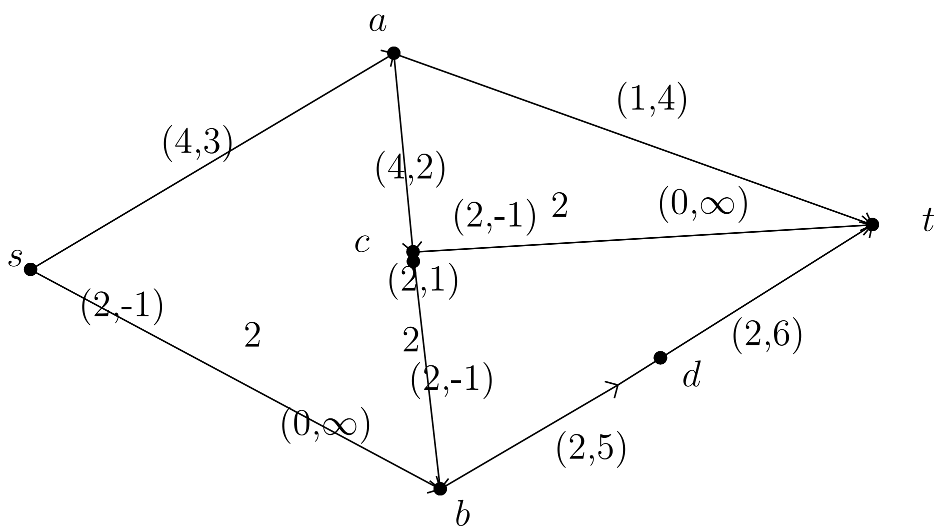
4. Pour chaque arc (i,j) du chemin précédent, diminuer sa capacité de C: $c'_{\mathrm{ij}} = c_{\mathrm{ij}}$-C; si un arc devient de capacité nulle, passer son coût à ∞. Et augmenter parallèlement la capacité de l'arc (j,i) de C en lui attribuant $-d_{\mathrm{ij}}$ et passer à 2.

EXEMPLE:

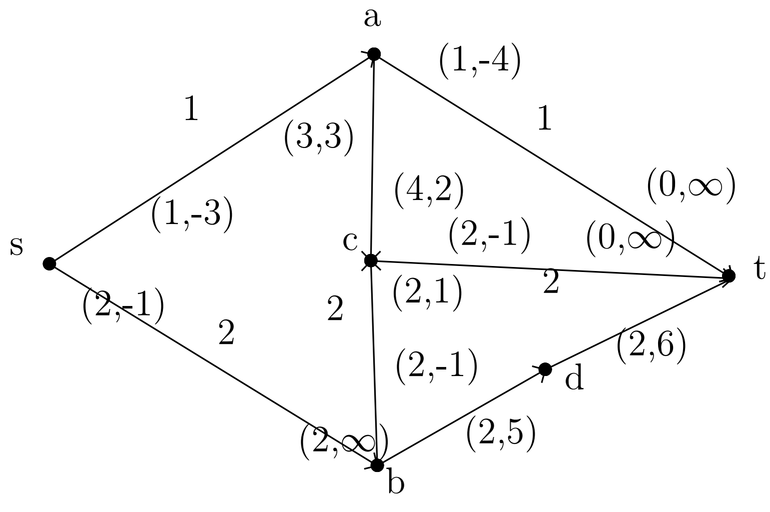
1. On considère le graphe ci-dessous, où les parenthèses représentent (capacité, coût unitaire) pour chaque arc; l'objectif est un flot de valeur 5 , de coût minimal:



2. Première étape on obtient un flot égal à 2 le long de (s,b,c,t) puis calcul des capacités résiduelles:



3. On recommence et on obtient un flot égal à 1 le long de (s,a,t); le calcul des nouvelles capacités donne:



4. On recommence et le chemin (s,a,c,b,d,t) convient et donne un flot de 2:

En fin de compte:

1 sur le chemin (s,a,t)

2 sur le chemin (s,a,c,t)

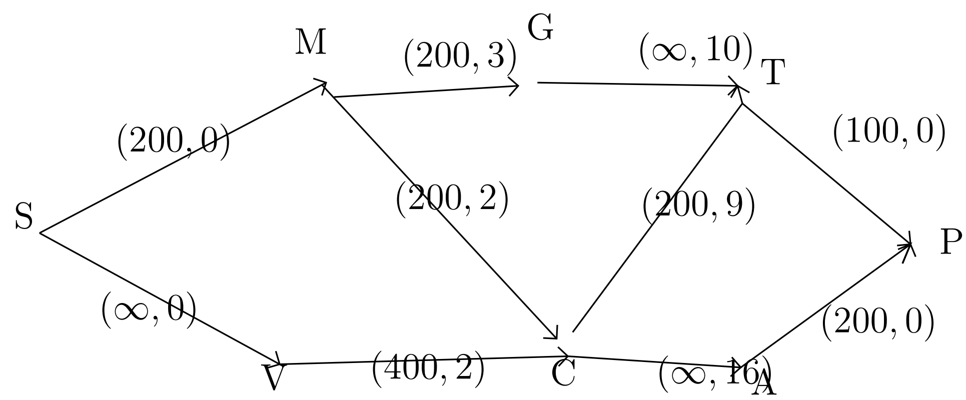
2 sur le chemin (s,b,d,t)

on remarque qu'il y a eu simplification +2 et -2 sur l'axe (c,b)

remarque: 1+2+2=5 et c'est aussi le flot maximal.

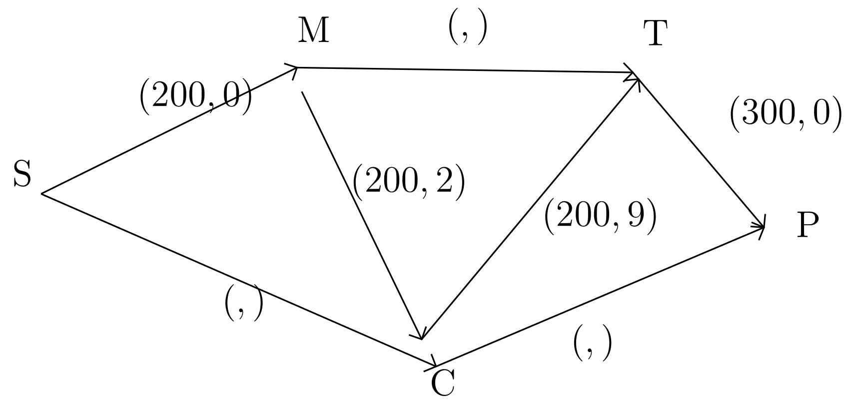
Travaux dirigés-à préparer (suite)

Le dépôt central de poissons de la chaîne Lyder se situe à Sète; les magasins se trouvent à Montauban (M), Grenoble (G), Tours (T), Vierzon (V), Conflans-Sainte Honorine (C), Albi (A), Paris (P); le graphe suivant donne les volumes maximaux transportables sur chacun des tronçons d'autoroute et les prix unitaires (en Euros/m^3); déterminer les choix permettant de transporter au total de Sète à Paris le plus grand volume possible au côut total le plus bas.



1. Expliquer ce que signifient ici les ∞.

2. Expliquer pourquoi on peut simplifier le graphe en



3. Résoudre

7. Application à un problème d'affectation simple

Nous appellerons problème d'affectation simple celui qui consiste à affecter n personnes distinctes à n postes avec les contraintes suivantes:

i) une personne ne peut être affectée qu'à un poste au plus

ii) un poste ne peut être attribué qu'à une personne au plus

iii) certaines postes sont interdits à certains candidats

iv) certaines personnes ne sont candidates qu'à certains postes.

Pour déterminer une solution maximale c'est à dire l'affectation du plus grand nombre de postes on peut considérer le graphe biparti dont les sommets $C_1, \ldots, C_n$ représentent les candidats etles sommets $P_1, \ldots, P_n$ représentent les postes, et dont les arêtes sont les (C_i, P_j); lorsque le candidat C_i est candidat au poste P_j **ET** le poste P_j est ouvert au candidat C_i, on attribuera à cette arête la capacité 1, dans le cas contraire on lui attribuera la capacité 0. Pour transformer ce problème en un problème de flot maximal nous devons aussi créer un sommet S (source) avec des arêtes (S, C_i) de capacité 1 et un sommet T(puits) et des arêtes (P_j, T) de capacité 1.

Alors toute solution maximale d'affectation est un flot maximal dans le graphe bipartite décrit.

7. Complexité du problème de flot maximal

1. Si on désigne par m le nombre d'arcs et si les capacités sont des entiers, désignons par v le flot maximal, on peut facilement montrer que l'algorithme est en O(mv).

2. Si on choisit chaque fois la chaîne améliorante la plus courte on obtient un algorithme en O(m^2n) (Edmonds et Karp) où n est le nombre de sommets.

Objectifs:

1. Savoir reconnaître un problème de flot maximal dans un graphe orienté.

2. Comprendre ce qu'est une chaîne améliorante et comment elle permet effectivement d'améliorer le flot.

3. Comprendre ce qu'est une coupe d'un graphe et pourquoi un flot maximal correspond à une coupe minimale

4. Savoir appliquer l'algorithme d'Edmonds-Karp.

5. Comprendre pourquoi dans le cas de capacités entières le flot maximal sera à composantes entières et atteint en un temps fini.

5bis. Comprendre et savoir appliquer la méthode du Pousser-rééti-quetter

6. Savoir déterminer un flot maximal, à coût minimal.

7. Savoir appliquer la méthode dans le cas d'un problème d'affectation simple.