Exercice chaînes de Markov

Travail réalisé avec Maxima.

1. *On reprend la vie du robot et on suppose qu'au départ (instant 0) il se trouve aux différents sommets avec la même probabilité, c'est-à-dire* $\frac{1}{5}$.

Écrire le vecteur-ligne $\pi_0 = (P(X_0 = 1), P(X_0 = 2), P(X_0 = 3), P(X_0 = 4), P(X_0 = 5))$.

Les événements étant équiprobables, on a :

$$\pi_0 = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$$

2. *En déclarant le vecteur-ligne comme une matrice (1 ligne, 5 colonnes) et la matrice de transition, faire calculer le vecteur ligne* π_1.

D'après le cours, on a $\pi_1 = \pi_0 * P$, avec $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

Pour ce faire, utilisons Maxima.

```
(%i1)   P: matrix(
         [1/3,0,1/3,1/3,0],
         [0,1/3,0,1/3,1/3],
         [1/3,0,1/3,0,1/3],
         [1/3,1/3,0,1/3,0],
         [0,1/3,1/3,0,1/3]
        );
```

$$(P)\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

```
(%i2)   pizero: matrix(
         [1/5,1/5,1/5,1/5,1/5]
        );
```

$$(pizero)\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

```
(%i4)   pizero.P;return;
```

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

```
(%o4)   return
```

On en tire que

$$\pi_1 = \pi_0 * P$$

$$\pi_1 = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$$

$$\pi_1 = \pi_0$$

3. *Répondre à la question : quelles seront les probabilités de sa position à l'issue du 100[ème] mouvement ?*

Pour trouver ces probabilités, il faut faire :

$$\pi_{100} = \pi_{99} * P$$

$$\pi_{99} = \pi_{98} * P$$

$$\dots$$

$$\pi_1 = \pi_0 * P$$

$$\pi_0 = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$$

On lance la commande suivante dans Maxima :

```
-->     for k:1 thru 100 do (print("k =",k), pizero:pizero.P, print(pizero));
```

On final, on a :

```
k =99
[1/5 1/5 1/5 1/5 1/5]
k =100
[1/5 1/5 1/5 1/5 1/5]
(%o24)   done
```

D'où :

$$\pi_{100} = \pi_{99} = \cdots = \pi_1 = \pi_0 = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$$

4. *On reprend à zéro et on suppose que le robot est à la position 1 à l'instant 0 ; c'est-à-dire*

$$\pi_0 = (1,0,0,0,0)$$

Déterminer le vecteur ligne π_1.

Comme précédemment, on a :

$$\pi_1 = \pi_0 * P$$

Avec Maxima, il vient :

```
(%i2)     pizero: matrix(
            [1,0,0,0,0]
          );
(pizero)  [1 0 0 0 0]

(%i4)     pizero.P;return;
(%o3)     [1/3 0 1/3 1/3 0]
(%o4)     return
```

On en tire que

$$\pi_1 = \pi_0 * P$$

$$\pi_1 = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$$

5. *Déterminer les vecteurs ligne π_2, π_3, π_4.*

Toujours avec Maxima, on réutilise la boucle précédente :

```
(%i5)    for k:1 thru 4 do (print("k=", k), pizero:pizero.P, print(pizero));
```

$k = 1$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$k = 2$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$k = 3$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{27} & \frac{4}{27} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} \end{bmatrix}$$

$k = 4$

$$\begin{bmatrix} \frac{19}{81} & \frac{14}{81} & \frac{17}{81} & \frac{17}{81} & \frac{14}{81} \end{bmatrix}$$

(%o5) *done*

D'où :

$$\pi_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9})$$

$$\pi_3 = (\frac{7}{27}, \frac{4}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27})$$

$$\pi_4 = (\frac{19}{81}, \frac{14}{81}, \frac{17}{81}, \frac{17}{81}, \frac{14}{81})$$

6. *Essayez de deviner ce qui se passera avec le temps (en faisant autant de calculs que vous le désirez).*

Pour essayer de voir ce qui va se passer, on peut relancer la boucle précédente en allant jusqu'à un nombre arbitrairement haut, par exemple 100. Voyons ce qu'il se passe :

$k = 100$

$$\left[\frac{8349115835858583562790670304374638338099648756019}{41745579179292917813953351511015323088870709282081} \quad \frac{8349115835858583562790670300446224573492777590289}{41745579179292917813953351511015323088870709282081} \quad \frac{8349115835858583562790670302874117801892752672742}{41745579179292917813953351511015323088870709282081} \quad \frac{8349115835858583562790670302874117801892752672742}{41745579179292917813953351511015323088870709282081} \quad \frac{8349115835858583562790670300446224573492777590289}{41745579179292917813953351511015323088870709282081} \right]$$

Quand on calcule chaque composante de la matrice, on trouve qu'elle est environ égale à 0,2.

Or $0{,}2 = \frac{1}{5}$.

On extrapole donc que :

$$\pi_\infty = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$$

C'est-à-dire que **les événements deviennent équiprobables avec le temps**.