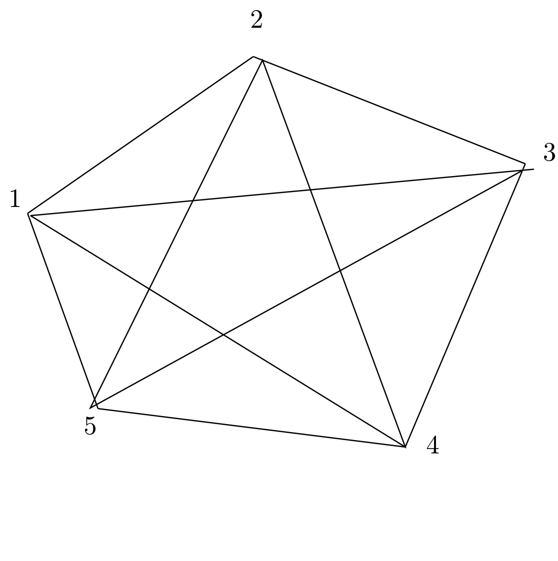
Chaînes de Markov (processus stochastiques à temps discret)

0. La vie d'un robot prisonnier

On considère un pentagone régulier (on excusera le dessinateur) dont les sommets seront notés 1,2,3,4,5 et un robot qui se déplace entre les sommets de ce pentagone



Le robot a été programmé de la manière suivante:

Lorsqu'il se trouve au sommet 1 les probabilités qu'il se déplace vers les autres sommets sont les suivantes:

1. de 1 à 1 : 1/3 (c'est à dire ne pas bouger); de 1 à 3 : 1/3; de 1 à 4: 1/3

Lorsqu'il se trouve au sommet 2 les probabilités qu'il se déplace vers les autres sommets sont les suivantes:

2. de 2 à 2 : 1/3; de 2 à 4 : 1/3; de 2 à 5 : 1/3

Lorsqu'il se trouve au sommet 3 les probabilités qu'il se déplace vers les autres sommets sont les suivantes:

3. de 3 à 3 : 1/3; de 3 à 5 : 1/3; de 3 à 1 : 1/3

Lorsqu'il se trouve au sommet 4 les probabilités qu'il se déplace vers les autres sommets sont les suivantes:

4. de 4 à 4: 1/3; de 4 à 1 : 1/3; de 4 à 2 : 1/3

Lorsqu'il se trouve au sommet 5 les probabilités qu'il se déplace vers les autres sommets sont les suivantes:

5. de 5 à 5: 1/3; de 5 à 2 : 1/3; de 5 à 3 : 1/3

Question 1. *Où sera le robot à l'instant n ?*

Impossible à savoir car

1) on ne sait pas où il est au début (=à l'instant 0)

2) à chaque déplacement on sait seulement avec quelles probabilités il fait tel ou tel mouvement

La réponse sera donc en termes de probabilités

Pour tout k, X_k =la variable aléatoire qui désigne l'état à l'instant k, c'est à dire le sommet occupé à l'instant k.

X_k prend ses valeurs dans $\{1,2,3,4,5\}$

X_k est inconnu (a priori) et on ne connaitra que ses probabilités

P($X_k=1$), P($X_k=2$), P($X_k=3$), P($X_k=4$), P($X_k=5$)

que l'on notera dans un vecteur horizontal

$$\pi_k = (\ P(X_k=1), P(X_k=2), P(X_k=3), P(X_k=4), P(X_k=5)\ )$$

La formule des probabilités totales nous apprend

pour chaque n et chaque j

P($X_{n+1}=j$)=

P(X_n=1)P(X_{n+1}=j/X_n=1) +P(X_n=2)P(X_{n+1}=j/X_n=2) + P(X_n=3)P(X_{n+1}=j/X_n=3) + P(X_n=4)P(X_{n+1}=j/X_n=4) + P(X_n=5)P(X_{n+1}=j/X_n=5).

Si on pose $\pi_n = (\ P(X_n=1), P(X_n=2), P(X_n=3), P(X_n=4), P(X_n=5)\ )$

= la distribution de probabilités à l'instant n

et la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix},$$

où pour chaque (i,j) p_{ij}=P(X_{n+1}=j/X_n=i)

L'histoire du robot se traduit par

$$\pi_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \pi_{n+1} = \pi_n P.$$

1. Définitions:

Définition 2. *Processus stochastiques à temps discret:*

suite $(X_t, t \in T)$ *de variables aléatoires indexées par un paramètre t qui décrit un sous-ensemble* T *de* $\mathbb{N}$*, définies sur un même espace de probabilités* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, et à valeurs dans un ensemble, appelé espace des états, qui sera noté S.*

Un processus stochastique permet de modéliser les états d'un système évoluant dans le temps; à tout élément $\omega \in \Omega$ correspond une affectation de valeurs à la variable d'état $X_t = X_t(\omega)$ pour tout t de T; ces valeurs constituent une évolution particulière du système, appelée *réalisation* ou *trajectoire*. L'historique d'un processus à l'instant τ est la liste $(X_t, 0 \leqslant t \leqslant \tau)$.

Exemples:

- Somme de variables aléatoires (éventuellement indépendantes): lancers de dés, tirages de boules (avec ou sans remise) dans une urne.

- Jeu de Pile ou Face entre deux joueurs A et B qui commencent avec 3 Euros chacun, à chaque tirage d'une *pièce équilibrée* A donne un Euro à B, si le résultat est Pile, et reçoit un Euro de B , si c'est face; on arrête dès qu'un joueur est ruiné; X_n désigne la fortune de A à l'issue du n-ième lancer.

Définition 3. *Processus Markovien à temps discret:*

Un processus stochastique ***à temps discret*** $(X_n, n \in T \subset \mathbb{N})$,

*à valeurs dans un espace d'****états S, fini ou dénombrable***

est dit MARKOVIEN lorsque pour tout $n \in T$ *et tout état i de S on a*

$P(X_{n+1} = i / X_0, X_1, \ldots, X_n) = P(X_{n+1} = i / X_n)$.

On dira aussi chaîne de Markov à temps discret.

Remarque 4.

DANS UN PROCESSUS MARKOVIEN

L'AVENIR NE DEPEND PAS DU PASSE MAIS SEULEMENT DU PRESENT

Exemples:

- Marche aléatoire: X_n est l'abscisse du point à l'instant n; Y_n est la variable aléatoire qui décrit le mouvement à l'instant n+1 (elle vaut +1 ou -1), on suppose que les Y_n sont indépendantes et de même loi; alors $\forall n \geqslant 1, X_{n+1} = X_n + Y_n$.

- Gestion de stocks: La demande d'un article donné est à la période n désignée par D_n, de distribution $p(D_n = k) = a_k$, pour k=1,2,..; le stock au début de la période n est désigné par X_n; on suppose que le circuit de réapprovision est tel qu'une commande est satisfaite suffisamment rapidement.

La politique de commande est la suivante: soient s<S deux quantités.

Si X_n<s on commande S-X_n unités, si Si $X_n \geqslant$ s on ne commande rien. D'où le stock au début de la période n+1 est $\begin{cases} X_{n+1} = S - D_n, \text{si } X_n < s \\ X_{n+1} = X_n - D_n, \text{si } X_n \geqslant s \end{cases}$.

La suite (X_n) définit une chaîne de Markov dont l'espace des états est $\mathbb{Z}$

$$P(X_{n+1} = j / X_n = i) = \begin{cases} a_k, \text{si } i < s \text{ et } j = S - k, k = 0, 1, \ldots. \\ a_k, \text{si } i \geqslant s \text{ et } j = i - k, k = 0, 1, \ldots. \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Définition 5.

Une chaîne de Markov (à temps discret) est dite homogène

si $\forall (i, j) \in S^2, \forall n \in \mathbb{N}$, *P*$(X_{n+1}=j/X_n=i)=P(X_{n+k+1}=j/X_{n+k}=i)$*, pour tout* $k \geqslant 0$.

Remarque 6.

DANS UN PROCESSUS MARKOVIEN HOMOGENE

L'AVENIR DE DEPEND QUE DU PRESENT ET (en plus) LES CHANGEMENTS NE DEPENDENT QUE DU LAPS DE TEMPS ECOULE ET PAS DE LA « DATE »

2. Matrices de transition

Désormais nous considérerons des *chaînes de Markov, à temps discret, à espace d'états FINI, homogènes*.

Nous noterons p_{ij} = P(X_{n+1}=j/X_n=i) (donc pour tout n); la matrice $P = (p_{\text{ij}})$ sera appelée *matrice de transition* de la chaîne de Markov. Elle vérifie

$$\begin{cases} \forall (i, j) \in S^2, p_{\text{ij}} \geqslant 0 \\ \forall i \in S, \sum_{j \in S} p_{\text{ij}} = 1 \end{cases} \text{(« matrice stochastique »).}$$

Remarque 7.

Reprendre la matrice P de l'exemple du robot et vérifier qu'elle a bien ces propriétés.

Notation 8. *IMPORTANT*

On désignera par P^m *la matrice* $P \times \ldots \times P$ *et par* $p_{\mathrm{ij}}^{(m)}$ *ses termes*

attention : pas p_{ij}^{m} *!!!!!!!!*

On peut montrer que $P(X_{n+m}=j/X_n=i)=p_{\mathrm{ij}}^{(m)}$

Une chaîne de Markov, de matrice de transition P, peut être représentée par un graphe orienté G, dont les sommets correspondent aux états de la chaîne et où les arcs relient les sommets i et j lorsque $p_{\mathrm{ij}} > 0$.

Exercice 1. A réaliser et rendre suivant les modalités précisées

Avec Maxima

1. On reprend la vie du robot et on suppose qu'au départ (instant 0) il se trouve aux différents sommets avec la même probabilité c'est à dire 1/5.

Ecrire le vecteur ligne $\pi_0 = (\ P(X_0=1), P(X_0=2), P(X_0=3), P(X_0=4), P(X_0=5) \ )$.

2. En déclarant le vecteur-ligne comme une matrice (1 ligne, 5 colonnes) et la matrice de transition, faire calculer le vecteur ligne π_1.

3. Répondre à la question :: quelles seront les probabilités de sa position à l'issue du 100 ème mouvement?

4. On reprend à zéro et on suppose que le robot est à la position 1 à l'instant 0; c'est à dire $\pi_0 = (\ 1, 0, 0, 0, 0 \ )$

Déterminer le vecteur ligne π_1.

5. Déterminer les vecteurs ligne π_2 , π_3, π_4

6. Essayez de deviner ce qui se passera avec le temps (en faisant autant de calculs que vous le désirez).

Nous reprendrons ce problème plus loin.

Exemple:

Soit une machine dont on peut décrire l'ensemble des états d'usure par les numéros 1,2,3,4.

1: bon état de fonctionnement

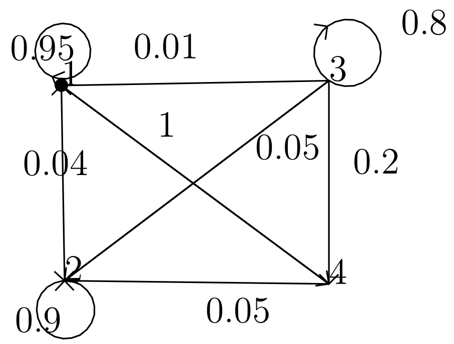
2. premiers problèmes d'usure

3. usure sérieuse

4. machine à l'arrêt pour réparation

avec la matrice de transition P= $\begin{pmatrix} 0.095 & 0.04 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ce qui donne lieu au graphe suivant:



Remarque 9. Si on note Π_n le vecteur LIGNE $(\ P(X_n=1), P(X_n=2), P(X_n=3), P(X_n=4)\ )$

alors $\forall n \in \mathbb{N}, \Pi_{n+1} = \Pi_n P$; d'où le nom de matrice de transition, puisqu'à partir des probabilités des différents états à l'instant n elle nous apprend les probabilités des états à l'instant suivant n+1.

Proposition 10. *Temps de séjour à l'état i*

Soit une chaîne de Markov homogène de matrice de transition $P = (p_{\mathrm{ij}})$, on désigne par R_i la variable aléatoire égale au temps de séjour à l'état i.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(R_i{=}k){=}(1 - p_{\mathrm{ii}}){p_{\mathrm{ii}}}^k$ (loi géométrique)

(k fois de suite on fait du « surplace »: p_{ii}, la suivante on bouge: (1-p_{ii})

On rappelle que l'espérance d'une telle loi est $\frac{p_{\mathrm{ii}}}{1-p_{\mathrm{ii}}}$.

3. Classification des états d'une chaîne de Markov

Définition 11. *Etat* ***accessible*** *depuis un autre état*

On dira que l'état j est accessible depuis l'état i lorsqu'il existe un chemin sur le graphe de la chaîne qui va de i à j.

Définition 12. *Etat**s communiquants***

On dira que les états i et j communiquent lorsque i est accessible depuis j et j est accessible depuis l'état i.

(dans le langage des graphes: ils appartiennent à la même composante connexe).

Proposition 13. *i et j communiquent lorsqu'il existe k,q tels que* $p_{\mathrm{ij}}^{(k)} > 0$ *et* $p_{\mathrm{ji}}^{(q)} > 0$.

L'espace des états est la réunion disjointe des composantes connexes (classes d'équivalence pour la relation « fortement connexe »).

Définition 14. *Relation d'ordre sur les composantes connexes*

Soient deux composantes connexes C_a *et* C_b*, on dira que* $C_a \longrightarrow C_b$ *lorsqu'il existe (au moins) un* ***chemin*** *d'un sommet de* C_a *vers un sommet appartenant à* C_b*; ceci est une relation d'ordre, on dira que* C_b *est un successeur de* C_a.

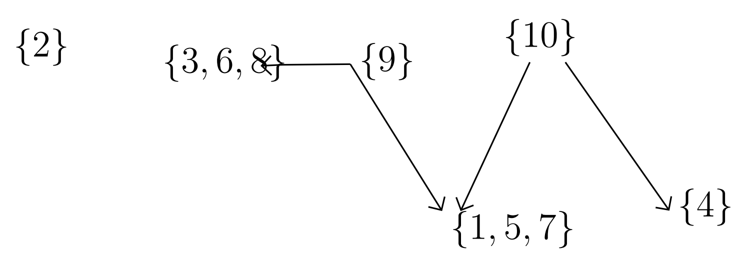
Définition 15. *Diagramme de Hasse associé à une chaîne de Markov*

Soit une chaîne de Markov le diagramme de Hasse associé est le graphe dont les sommets sont les composantes connexes et qui admet un arc d'une classe C_a vers une classe C_b lorsque C_b est un successeur de C_a.

Exemple 16. Soit la chaîne de Markov dont la matrice de transition est la suivante

$$A = \begin{array}{cccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3/5 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\
3/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0
\end{array}.$$

1. Graphe associé à cette chaîne de Markov.
2. Les composantes connexes: $\{1,5,7\}, \{2\}, \{4\}, \{10\}, \{9\}, \{3,6,8\}$.
3. Le Diagramme de Hasse associé :



Définition 17. *Classes persistantes, classes transitoires; chaînes réductibles, irréductibles*

Une classe est dite persistante quand elle n'a pas de successeur; on peut montrer qu'il y a au moins une classe persistante.

Une classe qui n'est pas persistante est dite transitoire.

Tout état d'une d'une classe persistante est dit « persistant » (comprendre ce qui est persistant).

Tout état d'une classe transitoire est dit « transitoire » (comprendre ce qui est transitoire).

S'il n 'y a qu'une classe, elle est forcément persistante, la chaîne sera dite irréductible; sinon elle est réductible.

Exemple 18. (suite)

Classes persistantes: $\{1,5,7\},\{2\},\{4\},\{3,6,8\}$

Classes transitoires: $\{10\},\{9\}$

Etats persistants: $\{1,5,7,2,4,3,6,8\}$

Etats transitoires: {9,10}

Proposition 19. *Soit C une classe persistante et S l'espace des états, alors $\forall i \in C, \forall j \notin C, p_{\mathrm{ij}} = 0$.*

Proposition 20. *Une chaîne est irréductible si et seulement si $\forall (i, j) \in S^2, \exists m \in \mathbb{N}, p_{\mathrm{ij}}^{(m)} > 0$.*

Définition 21. *Etat absorbant, chaîne absorbante*

Lorsqu'une classe persistante ne contient qu'un seul état, celui-ci est dit absorbant; autrement dit p_{ii}=1.

Lorsque tous les états persistants sont absorbants la chaîne est dite absorbante.

Exemple 22. (suite)

Etats absorbants: $\{2,4\}$; mais la chaîne n'est pas absorbante parce qu'il y a des états persistants non absorbants.

Exercice 2. la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ décrit l'évolution de la fortune de A, p est la probabilité de pile et q celle de face; p+q=1. p et q non nuls.

Faire le graphe, remarquer deux classes persistantes et absorbantes.

ET A L'INFINI COMMENT CELA SE PASSE-T-IL ?

Définition 23. *Période d'un état*

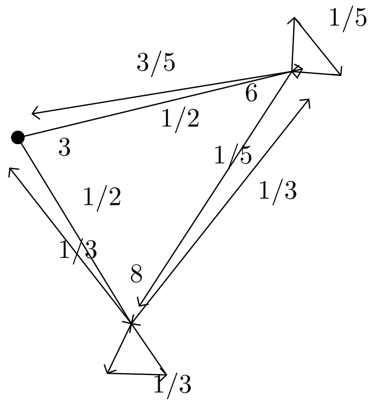
Soit un état i tel qu'il existe n>0 pour lequel $p_{\mathrm{ii}}^{(n)} > 0$, *alors l'ensemble des n>0 tels que* $p_{\mathrm{ii}}^{(n)} > 0$ *possède un pgcd.*

Soit d le pgcd , s'il est égal à 1 on dira que l'état i est APERIODIQUE, si d>1 on dira que l'état i est d périodique.

On peut montrer que tous les états d'une même classe sont de même période.

Exemple 24.

1) Etude de la classe {3,6,8}



ON voit que le sommet 3 est de période le pgcd de (2 et de 3,.....)=1 donc apériodique

on voit plus vite encore que les sommets 6 et 8 sont de période :1 donc apériodiques

2) la classe {5,7,1} même chose

4. Comportement asymptotique d'une chaîne de Markov irréductible

Soit le vecteur **ligne** $\pi^{(0)} = (P(X_0 = i), i \in S)$ qui représente la distribution des probabilités à l'instant initial (éventuellement il pourra y avoir un état certain auquel cas $\pi^{(0)} = (0, 0..., 1, 0, ..., 0)$.

La distribution des probabilités à l'issue de n étapes sera $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$.

Théorème 25. *Le cas des chaînes irréductibles apériodiques*

(P^n) tend vers une matrice P^*, nécessairement stochastique, dont toutes les lignes sont identiques (notées π^*), et à termes strictement positifs, alors la suite $\left(\pi^{(n)}\right)$ tend vers le vecteur ligne π^* et donc indépendantes.

π^* est défini par le système $\left\{\begin{array}{l} \pi P^* = \pi \\ \pi \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \end{array}\right.$

Si $\pi^* = (\pi_1^*, ..., \pi_p^*)$ alors pour i=1,..,p $\pi_i^* = \frac{1}{\mu_i}$ où μ_i est l'espérance du nombre d'étapes entre deux passages consécutifs par l'état i.

Exemple 26. On considère la chaîne de Markov définie par la matrice de transition

$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.

1. La chaîne est irréductible.
2. Elle est apériodique.
3. Le vecteur $\pi^* = (\pi_1^*, ..., \pi_p^*)$ est la seule solution du système: $\left\{\begin{array}{l} 1/4x_1 + 1/4x_2 + 1/4x_3 = x_1 \\ 0x_1 + 1/4x_2 + 1/2x_3 = x_2 \\ 3/4x_1 + 1/2x_2 + 1/4x_3 = x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array}\right.$, que l'on résoud :$\pi^*$=(1/4,3/10,9/20).

Exercice 3. A réaliser et rendre suivant les modalités précisées

Avec Maxima

1. On reprend l'exemple au-dessus.

Vérifier l'exactitude du résultat de cet exemple.

2. Définissez (dans Maxima) le système d'équations ci-dessus et faites-le résoudre par Maxima.

3. Si vous savez la diagonaliser déterminer deux matrices Q inversible et D diagonale telles que $Q^{-1}PQ=D$, c'est à dire $P=QDQ^{-1}$

4. Comme pour tout n $P^n = QD^nQ^{-1}$

a. Trouver (à la mian) la limite de (D^n)

b. En déduire quelle multiplication matricielle donnera la limite de (P^n).

c. Comparer avec le résultat affiché dans l'exemple.

Théorème 27. *Le cas des chaînes de Markov irréductibles périodiques*

Soit une chaîne irréductible de période d

i) S l'espace des états peut être partionné en d classes $D_1,..,D_d$ *telles que si elle est à l'étape k en* $i \in D_t$ *elle sera à l'étape k+1 en* $j \in D_{t+1[d]}$.

POUR COMPRENDRE QUE CES CLASSES NE SONT PAS FORCEMENT DES SINGLETONS VOIR EXEMPLE CI-DESSOUS

ii) En permutant des lignes et les mêmes colonnes de la matrice P^d *on obtient une matrice R diagonale par (d) blocs qui correspondent à d sous-chaînes irréductibles et apériodiques.*

Si les états i et j appartiennent à la même classe D_d *alors* $\lim\left(r_{\mathrm{ij}}^{(n)}\right)=\frac{d}{\mu_j}$

et sinon $\lim\left(r_{\mathrm{ij}}^{(n)}\right)=0$

où μ_j *est l'espérance du nombre d'étapes entre deux passages consécutifs par l'état j (dans la chaîne d'origine)*

Exemple 28. On considère la chaîne de Markov de matrice de transition $P=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Cette chaîne est irréductible.

2. $P^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5/12 & 0 & 7/12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $P^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/12 & 0 & 7/12 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/12 & 0 & 7/12 \end{pmatrix}$, (diagonale par blocs) donc $\forall k>0, p_{11}^{(3k)}=1$ et $\forall k\geqslant 0, p_{11}^{(3k+1)}=p_{11}^{(3k+2)}=0$. D'où l'état 1 est 3 périodique, d'où tous les états (car ils sont dans la même classe) sont 3-périodiques.

3. Ici on voit que si on part (étape 0) de l'état 1 , on se retrouve dans l'un des états $\{2,4\}$ à l'étape 2, puis dans l'un des états $\{3,5\}$ à l'étape 3 et à nouveau à l'état 1 à l'étape 3.

Si on réordonne les états en conséquence : 1,2,4,3,5 on obtient $R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/12 & 7/12 \\ 0 & 0 & 0 & 5/12 & 7/12 \end{pmatrix}$

La chaîne de Markov associée à R (c'est à dire à « une étape sur trois ») possède trois classes apériodiques.

4. Par chance R^2=R donc R est égale à sa propre limite, d'où $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ nous apprend que l'espérance de l'intervalle entre deux passages consécutifs en l'état 2 est 6 (de même pour l'état 4) et $\frac{5}{12}=\frac{3}{36/5}$ nous apprend que l'espérance de l'intervalle entre deux passages consécutifs en l'état 3 est 36/5.

Analogue pour l'état 5.

5. Comportement asymptotique d'une chaîne de Markov (connexe) réductible

On suppose les états numérotés de telle sorte que les classes persistantes sont numérotés en premier et que les états d'une même classe sont numérotés consécutivement, alors la matrice de transition a la forme suivante (« forme canonique »):

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_k & 0 \\ R_1 & R_2 & \dots & R_k & Q \end{pmatrix}$$, les matrices P_i étant stochastiques et représentant une chaîne irréductible sur l'ensemble des états d'une classe persistante (donc irréductible) et Q représentant les probabilités de transition entre deux états transitoires.

Remarquons que quel que soit l'état i de S et l'état

transitoire j la probabilité $\mathrm{p}_{\mathrm{ij}}^{(n)}$ tend vers 0.

a. Chaîne de Markov ergodique

Définition 29. *Chaîne ergodique*

Une chaîne de Markov est dite ergodique lorsqu'elle possède une unique classe persistante, dont les états sont tous apériodiques.

Exemple 30. Soit la chaîne de Markov à 12 états suivante

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ . & & & & & \dots & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ . & & & & & \dots & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ \dots & & & & & \dots & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ \dots & & & & & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Il y a deux classes, les déterminer; l'une est transitoire, l'autre est persistante.

2. Déterminer un état apériodique dans la classe persistante.

3. Montrer que la chaîne est ergodique.

Théorème 31.

Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov ergodique

(P^n) tend vers une matrice P^*, nécessairement stochastique, dont toutes les lignes sont identiques (notées π^*), et à termes strictement positifs, alors la suite $\left(\pi^{(n)}\right)$ tend vers le vecteur ligne π^* et donc indépendantes.

π^* est défini par le système $\left\{\begin{array}{l} \pi P = \pi \\ \pi\begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \pi \end{array}\right.$.

Si π^*=($\pi_1^*, \ldots, \pi_p^*$) alors pour état i $\pi_i^* = \frac{1}{\mu_i}$ où μ_i est l'espérance du nombre d'étapes entre deux passages consécutifs par l'état i.

Exemple 32. (suite) Déterminer la distribution limite.

b. Chaîne de Markov absorbante

Une chaîne de Markov est dite absorbante lorsque toutes ses classes persistantes sont absorbantes, c'est à dire réduites à un état, absorbant.

On peut numéroter les états de telle sorte que la matrice de transition soit $P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$, où la suite (Q^n) tend vers 0; par suite N=$(I-Q)^{-1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} Q^k$ (N est appelée la matrice fondamentale de la chaîne).

Théorème 33. *Dans le cas d'une chaîne de Markov absorbante, si P est la forme canonique de sa matrice de transition la suite (P^n) tend vers $\begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathrm{NR} & 0 \end{pmatrix}$.*

i) le nombre moyen (espérance) du nombre de visites de l'état transitoire j avant absorption , à partir de l'état transitoire i est n_{ij}.

ii) le nombre moyen (espérance) d'étapes avant absorption, à partir de l'état transitoire i, est N_i, la ième ligne de N.

iii) la probabilité d'absorption par l'état absorbant j, à partir d'un état transitoire i, est le terme b_{ij} de la matrice B=NR.

c. Chaîne de Markov possédant plusieurs classes persistantes

- Soit l'état de départ est certain , on peut se ramener (en un temps fini) à une chaîne de Markov irréductible,

- Soit l'état de départ répond à une distribution de probabilités $\pi^{(0)}$, alors l'étude se fait comme suit:

i) Contraction de chaque classe persistante en un état absorbant et étude de la chaîne absorbante ainsi obtenue

ii) Etude des chaînes irréductibles consituées par chacune des classes persistantes.

TRAVAUX DIRIGES (à préparer)

Exercice 4. Etude de marché

On traduira les données en termes de chaîne de Markov discrète, à espace d'états finis, homogène.

3 produits P_1, P_2 et P_3 sont en concurrence sur le marché.

Une enquête réalisée (sur un échantillon représentatif) a donné à la rentrée les résultats suivants: 30% ont déclaré consommer P_1, 50% ont annoncé consommer P_2 et 20% ont affirmé consommer P_3.

On a constaté qu'en général après une campagne de publicité

i. Parmi les consommateurs de P_1, 50% continuent à acheter P_1, 40% passent à P_2,10% passent à P_3

ii. Parmi les consommateurs de P_2, 70% continuent à acheter P_2, 30% passent à P_1

iii. Parmi les consommateurs de P_3, 80% continuent à acheter P_3, 20% passent à P_1

a. Déterminer l'état du marché à l'issue d'une campagne de publicité.

b. Quel serait l'état du marché après une seconde campagne de publicité ?

c. Quel sera l'état du marché après un grand nombre de campagnes de publicité ?

Exercice 5.

On considère la chaîne de Markov de matrice de transition P

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Représenter le graphe associés, déterminer les composantes connexes, les classes transitoires et les classes persistantes.

b. Y a t il des états absorbants ?

c. Etudier les classes persistantes mais non absorbantes ? Déterminer parmi elles les périodiques et les apériodiques, si il y en a.

d. Considérer la (les) classe(s) apériodique(s). Décrire la distribution de probabilités en régime permanent (cad « à l'infini »).

e. Considérer la (les) classe(s) périodique(s). Que se passe-t-il « à l'infini » ?

Exercice 6. Etude « à l'infini » de la chaîne de Markov de matrice de transition Q

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que la chaine est irréductible.

b. Déterminer si elle est périodique ou apériodique.

c. Reconnaître les classes décrites dans le cours dans ce cas.

d. Etude « à l'infini ».

Objectifs:

1. Savoir ce qu'est un processus stochastique à temps discret et distinguer parmi ceux-là les processus markoviens.

2. Dans le cas de chaînes de Markov à temps discret, à espace d'états FINI, homogènes: comprendre ce que sont la matrice de transition et le graphe associé.

3. Comprendre ce que sont des états communicants, des composantes connexes et le diagramme de Hasse associé.

4. Savoir ce que sont et savoir reconnaître les classes persistantes, les classes transitoires, les états absorbants, les états périodiques, apériodiques.

5. Savoir ce que sont les chaînes réductibles, les chaînes irréductibles.

6. Dans le cas d'une chaîne irréductible savoir déterminer la distribution des probabilités à l'instant n.

7. Dans le cas d'une chaîne irréductible **apériodique** comprendre et savoir déterminer la distribution limite des probabilités.

8. Dans le cas d'une chaîne irréductible **périodique** comprendre et savoir déterminer la distribution limite des probabilités.

9. pas plus.