corDE Optimisation

tous documents ou machines interdits

sauf dictionnaire pour les étudiants chinois

(le sujet comporte trois exercices; si il vous semble qu'il y a une erreur corrigez la en expliquant les raisons qui vous ont conduit à penser qu'il y avait une erreur)

Exercice 1. Un probleme de transport (environ 6 pts)

Deux fournisseurs trois clients

tableaux des disponibilités et des commandes $\begin{array}{cc} A & 5 \\ B & 5 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ 4 & 4 & 2 \end{array}$

tableau des coûts unitaires de transport $\begin{array}{ccc} 5 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 9 \end{array}$

Voici une proposition de solution $\begin{array}{ccc} 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{array}$

1.Déterminer si elle est optimale (justifier).

2. Dans le cas où elle ne l'est pas, quelle est la première modification à faire ?

Solution.

la solution initiale est non dégénérée (4=5-1)

u1+v2=7,u1+v3=8,u2+v1=4,u2+v2=6

d'où u1=0,u2=-1,v1=5,v2=7,v3=8

d11=5-(0+5)=0

d23=9-(-1+8)=2

donc cette solution est optimale

Exercice 2. Chaines de Markov (temps discret) (environ 10 pts)

On considère une chaine de Markov consistant en 9 états notés 1,2,3,4,5,6,7,8,9 avec la matrice de transition

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/8 & 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}$$

1. Après avoir dessiné le graphe représentant cette chaine déterminer

a. Les composantes connexes

b. Les classes(=composantes) persistantes et les classes(composantes) transitoires.

c. On considère la classe persistante comprenant le plus grand nombre d'états; elle constitue une « chaine de Markov ».

Est-elle périodique ? apériodique ? Justifier.

Que se passera-t-il à l' « infini » ?

c. On considère la classe persistante comprenant le plus petit nombre d'états; elle constitue une « chaine de Markov ».

Est-elle périodique ? apériodique ? Justifier.

Que se passera-t-il à l' « infini » ?

Solution.

1. {1}, {9},{2,3,4,5},{6,7,8}

2 . Deux classes transitoires {1} et {9}; deux classes persistantes {2,3,4,5} et {6,7,8}.

c. La classe {2,3,4,5} est apériodique: pour aller de 2 à 2 on peut 2->3->2 et 2->5->4->2 et pgcd(2,3)=1; donc il y aura une distribution limite (=stationnaire) définie par le système

$$\begin{cases} (\pi 2, \pi 3, \pi 4, \pi 5)\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi 2, \pi 3, \pi 4, \pi 5) \\ \pi 2 + \pi 3 + \pi 4 + \pi 5 = 1 \end{cases}$$

La résolution donne ((6/21,2/21,8/21,5/21).

d. La classe {6,7,8} est 3 périodique; pas de distribution limite

et tout dépendra en plus des conditions initiales

Exercice 3. Programmation linéaire (environ 8 pts)

Soit le domaine D défini par les contraintes suivantes

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leqslant 2 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ (x_1, x_2) \geqslant 0 \end{cases}.$$

On considère les fonctions

$f: (x_1, x_2) \longmapsto x_1 \text{-} 2x_2 + 10$ et g : $(x_1, x_2) \longmapsto 2x_1 + x_2 + 10$

Déterminer pour chacune de ces fonctions si elle possède un maximum sur D et, si oui, en quel point il est atteint.

Solution.

a.

On traduit les contraintes par

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + y_1 = 2 \\ -x_1 + x_2 + y_2 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + y_3 = 6 \\ (x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\text{-}x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 2 + x_1\text{-}x_2 = y_2 \\ 6 + x_1\text{-}2x_2 = y_3 \\ (x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \geqslant 0 \end{cases}$$

. point de base (0,0,2,2,6); base (y1,y2,y3), hors-base (x1,x2)

a. $f: (x_1, x_2) \longmapsto x_1 \text{-} 2x_2 + 10$, on cherche à augmenter f, donc à augmenter x1, qui rentre dans la base;

c'est y1 qui sort (seul quotient 2/1 positif)

d'où (D) s'exprime $\begin{matrix} 2\text{-}y_1 + 2x_2 = x_1 \\ 2 + 2\text{-y}_1 + 2x_2\text{-}x_2 = y_2 \\ 6 + 2\text{-y}_1 + 2\text{x}_2\text{-}2x_2 = y_3 \\ (x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \geqslant 0 \end{matrix}$ c'est à dire $\begin{matrix} 2\text{-}y_1 + 2x_2 = x_1 \\ 4\text{-y}_1 + x_2 = y_2 \\ 8\text{-y}_1 = y_3 \\ (x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \geqslant 0 \end{matrix}$; point de base (2,0,0,4,8); base (x1,y2,y3) hors-base (x2,y1)

et f s'exprime 2-$y_1 + 2x_2$-$2x_2$ +10 = 12-y1.

Tous les coeff dans f sont négatifs, donc le maximum est atteint en ce point de base et vaut 12 (cad en x1=2,x2=0).

b. g : $(x_1, x_2) \longmapsto 2x_1 + x_2 + 10$

On reprend au point $\begin{cases} 2\text{-}x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 2 + x_1\text{-}x_2 = y_2 \\ 6 + x_1\text{-}2x_2 = y_3 \\ (x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \geqslant 0 \end{cases}$. point de base (0,0,2,2,6); base (y1,y2,y3), hors-base (x1,x2)

on cherche à augmenter g, donc à augmenter x1, qui rentre dans la base; y1 en sort

(D) s'exprime alors $\begin{matrix} 2\text{-}y_1 + 2x_2 = x_1 \\ 4\text{-y}_1 + x_2 = y_2 \\ 8\text{-y}_1 = y_3 \\ (x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \geqslant 0 \end{matrix}$; point de base (2,0,0,4,8); base (x1,y2,y3) hors-base (x2,y1)

et g s'exprime 2(2-$y_1 + 2x_2$)+x2+10=14-2y_1+5x_2;

maintenant on veut faire grandir x2

mais comme il n'y a aucune contrainte sur x2, il peut croître à l'infini et alors g croitra aussi à l'infini donc g n'a pas de maximum.

Pour ceux qui préfèrent le tableau du simplexe

a. pour f

	$x1$	$x2$	$y1$	$y2$	$y3$	z	b
$y1$	1	-2	1	0	0	0	2
$y2$	-1	1	0	1	0	0	2
$y3$	-1	2	0	0	1	0	6
z	-1	2	0	0	0	1	10

premier pivot : colonne de x1; ligne de y1

	$x1$	$x2$	$y1$	$y2$	$y3$	z	b
$x1$	1	-2	1	0	0	0	2
$y2$	0	-1	4	1	0	0	4
$y3$	0	0	1	0	1	0	8
z	0	0	1	0	0	1	12

tous les coeff dans z sont positifs c'est fini

b. pour g

	$x1$	$x2$	$y1$	$y2$	$y3$	z	b
$y1$	1	-2	1	0	0	0	2
$y2$	-1	1	0	1	0	0	2
$y3$	-1	2	0	0	1	0	6
z	-2	-1	0	0	0	1	10

premier pivot: colonne de x1; ligne de y1

	$x1$	$x2$	$y1$	$y2$	$y3$	z	b
$x1$	1	-2	1	0	0	0	2
$y2$	0	-1	1	1	0	0	4
$y3$	0	0	1	0	1	0	8
z	0	-5	2	0	0	1	14

le second pivot se ferait colonne de x2, mais voila il n'y a que des coeff négatifs (ou nuls) donc pas de maximum