Problèmes de transport

1. Problème de transport

On considère une entreprise qui distribue un produit unique, le schmillblick, et possède m entrepôts (C_1, ..., C_m) et compte n clients (P_1, ..., P_n) qu'elle « doit » ravitailler.

Chaque entrepôt contient une quantité c_i (i=1,..,m) d'exemplaires du schmillblick et chaque client commande une quantité p_j (j=1,..,n) de ce même produit; on suppose dans un premier temps que $\sum_{i=1}^{m} c_i = \sum_{j=1}^{n} p_j$.

Le coût de transport d'un exemplaire du dépôt C_i vers le client P_j est égal à a_{ij}.

On demande l'organisation de ces expéditions de sorte à minimiser le coût total.

2.1 Application des résultats sur les flots

Pour résoudre on définit le graphe bipartite (G,A) dont les sommets sont les m+n points $\{C_1, ..., C_m, P_1, ..., P_n\}$ et les arêtes sont les (C_i, P_j), (de capacités illimitées) et de coûts respectifs (a_{ij}), on ajoute une source s, des arcs (s, C_i) de coût nul, un puits t, des arcs (P_j, t) de coût nul, on attribue à chacun des arcs (s, C_i) la capacité c_i et à chacun des arcs (P_j, t) la capacité p_j.

Un flot maximal de ce graphe valué aura pour valeur F; un flot maximal de coût minimal correspondra à l'organisation de ces expéditions.

2.2 Méthode spécifique pour les problèmes de transport

La résolution se fait en deux étapes:

1. Détermination d'une solution initiale

2. Itération d'améliorations pour aboutir à une solution optimale.

Exemple 1.

	P_1	P_2	P_3	P_4	
C_1	12	27	61	49	18
C_2	23	39	78	28	32
C_3	67	56	92	24	14
	9	11	28	16	

Deux méthodes pour obtenir une solution initiale

2.2.1 Méthode du coin Nord-Ouest

On attribue au coin Nord-Ouest la quantité maximale possible, ici C_1 envoie à P_1 9 unités et on continue ainsi, d'où la solution

$$\begin{array}{ccccc} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ C_1 & 9 & 9 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & 2 & 28 & 2 \\ C_3 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}.$$

2.2.2 Méthode de la différence maximale (Balas-Hammer)

1. On calcule dans chaque rangée (ligne ou colonne) la différence entre le coût le plus bas et celui qui lui est immédiatement supérieur.

2. On choisit la rangée de différence maximale et on affecte à la case de coût minimal la quantité maximale possible.

3. On recommence avec les stocks restant libres et les commandes non encore satisfaites.

SOLUTION NON DEGENEREE m+n-1

2.3 Recherche d'une solution optimale (à partir d'une solution non-dégénérée)

Détermination des potentiels et des coûts marginaux

$$\mathrm{u}_i + v_j = a_{\mathrm{ij}}$$

$$\mathrm{d}_{\mathrm{ij}} = a_{\mathrm{ij}} - (\mathrm{u}_i + v_j)$$

Définition 2. *Coûts marginaux*

Soient $(u_1, \ldots., u_m)$*,* $(v_1, \ldots., v_n)$ *des réels vérifiant pour tout couple (i,j) correspondant à une case affectée (=non nulle), la relation* $u_i + v_j = a_{ij}$*; (on remarquera que pour m+n inconnues il y a m+n-1 équations donc il y a un degré de liberté dans la détermination des valeurs des* $(u_1, \ldots., u_m)$*,* $(v_1, \ldots., v_n)$*.*

On appellera coûts marginaux les réels $d_{ij} = a_{ij} - (u_i + v_j)$ *(pour tous les couples (i,j) !!).*

Dans notre exemple:

$u_1 = 16, u_2 = 28, u_3 = 24, v_1 = -4, v_2 = 11, v_3 = 50$,$v_4$=0;

d'où sous forme de matrice les coûts marginaux

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 33 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 47 & 21 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

$d_{11} = d_{12} = 0$, $d_{13} = -5$,$d_{14} = 33$, $d_{21} = -1$, $d_{22} = d_{23} = d_{24} = 0$,$d_{31} = 47$, $d_{32} = 21$, $d_{33} = 18$, $d_{34} = 0$

.

Expédier une unité de plus de C_1 vers P_3 diminuera le coût de 5.

Remarque 3. Expliquons comment une case de coût marginal strictement négatif **peut** faire baisser le coût total:

Dans notre exemple expédier une unité de plus de C_1 vers P_3 diminuera le coût de 5; il faut donc revoir le plan de transport et ajouter des unités de C_1 vers P_3.

Pour celà il faut en retirer du contingent de C_1 vers P_1 ou du contingent de C_1 vers P_2; comme le coût d'expédition d'une unité de C_1 vers P_2 est plus élevé que le coût d'expédition de C_1 vers P_1, il vaut mieux retrancher du lot promis de C_1 vers P_2.

Conséquence: la commande de P_2 n'est plus complète, il faut trouver π tel que C_π reportera vers P_2 ce qu'il n'expédiera pas à P_3.; comme seul C_2 livrait à P_3 il n 'y a pas le choix et donc il faudra que la compensation soit faite par C_2 vers P_2.

D'où le schéma suivant:

$$\begin{array}{ccccc} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ C_1 & & - & + & \\ C_2 & & + & - & \\ C_3 & & & & \end{array}$$

Une unité de C_1 vers P_3: le coût augmente de a_{13}

Une unité de moins de C_1 vers P_2: le coût diminue de $a_{12} = u_1 + v_2$

Une unité de plus de C_2 vers P_2: le coût augmente de a_{22}

Une unité de moins de C_2 vers P_3: le coût diminue de $a_{23} = u_2 + v_3$.

Au total le coût augmente de $a_{13} - (u_1 + v_2) +$ a_{22}-$(u_2 + v_3) = d_{13} + \mathrm{d}_{22}$,

qui a des chances d'être négatif, nous verrons dans la proposition 4. ce qu'il faut faire si ce n'est pas le cas.

Combien d'unités vont être transférées d'une livraison à l'autre?

Le plus possible!

On ne peut transférer plus que ce que C_1 envoyait à P_2, ni plus que ce que C_2 envoyait à P_3, donc $\min\{x_{12}, x_{23}\}$; c'est à dire ici 9.

Ceci est la méthode du stepping-stone

Proposition 4. *La méthode du marche-pied (stepping stone)*

0) Déterminer une solution admissible non-dégénérée qui sera notée (x_{ij})

1) Calculer les coûts marginaux

2) Si tous les coûts marginaux sont supérieurs ou égaux à zéro nuls, la solution est optimale; sinon déterminer la (une) case dont le coût marginal est le plus petit (donc strictement négatif) et passer à l'étape 3.

3) Si $\mathrm{d}_{\alpha\beta}$=min $\{\mathrm{d}_{\mathrm{ij}}\}$ *déterminer* $t \in \{1, ..., n\}$, $a_{\alpha t} = \max\ \{a_{\alpha j},\ x_{\alpha j} > 0\}_{t \neq \beta}$, $s \in \{1, ..., m\}$, $a_{s\beta} = \max\{a_{i\beta}, x_{i\beta} > 0\}_{s \neq \alpha}$*et* $\mu = \min\{x_{\alpha t}, x_{s\beta}\}$.

i) si $\mathrm{d}_{\alpha\beta}$+d_{st}<0, *modifier le plan de transport comme suit:* $\left\{\begin{array}{l} x_{\alpha\beta} := x_{\alpha\beta} + \mu \\ x_{\alpha t} := x_{\alpha t}\text{-}\mu \\ x_{s\beta} := x_{s\beta}\text{-}\mu \\ x_{\mathrm{st}} := x_{\mathrm{st}} + \mu \end{array}\right.$;

ii) si $\mathrm{d}_{\alpha\beta}$+d_{st}⩾0, *chercher* $t \in \{1, ..., n\}$, $x_{\alpha t} > 0$, $s \in \{1, ..., m\}$, $x_{s\beta} > 0$ *tels que* $\mathrm{d}_{\alpha\beta}$+d_{st}<0 *et* $\mu = \min\{x_{\alpha t}, x_{s\beta}\}$ *et modifier le plan de transport comme suit:* $\left\{\begin{array}{l} x_{\alpha\beta} := x_{\alpha\beta} + \mu \\ x_{\alpha t} := x_{\alpha t}\text{-}\mu \\ x_{s\beta} := x_{s\beta}\text{-}\mu \\ x_{\mathrm{st}} := x_{\mathrm{st}} + \mu \end{array}\right.$;

iii) sinon recommencer avec un autre couple (α, β) *tel que* $\mathrm{d}_{\alpha\beta}$+<0 .

Puis, en tout état de choses, Retourner à l'étape 1.

Complexité : $O((m+n)^3)$.

Solution. (de l'exemple 3):

L'application une première fois du marche pied donne donc le plan de transport suivant

$$\begin{array}{lllll} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ C_1 & 9 & 0 & 9 & 0 \\ C_2 & 0 & 11 & 19 & 2 \\ C_3 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}.$$

Calculons les potentiels $(u_1, ..., u_m)$, $(\mathrm{v}_1, ..., v_n)$:

$u_1 = 0, u_2 = 17, u_3 = 3, v_1 = 12, v_2 = 22, v_3 = 61$,v$_4$=11.

Les coûts marginaux: $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 38 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 52 & 31 & 28 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme il y a encore un coût marginal strictement négatif , il faut continuer.

Les transferts à effectuer seront suivant le schéma:

$$\begin{array}{lllll} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ C_1 & - & & + & \\ C_2 & + & & - & \\ C_3 & & & & \end{array}$$

; d'où l'application une deuxième fois du marche pied donne donc le plan de transport suivant: $\begin{array}{lllll} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ C_1 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ C_2 & 9 & 11 & 10 & 2 \\ C_3 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}$.

Recalculons les potentiels: $u_1 = 0, u_2 = 17, u_3 = 3, v_1 = 6, v_2 = 22, v_3 = 61$,v$_4$=11

et les coûts marginaux: $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 58 & 31 & 28 & 0 \end{pmatrix}$.

Ils sont tous strictement positifs, donc ce plan de transport est optimal!

2.4 Que faire face à une solution dégénérée ?

2.4.1 face à une solution qui contient moins de m+n-1 cases non nulles

On remplace un ou plusieurs 0 par des $\varepsilon > 0$, que l'on fera « tendre vers 0 » lorsqu'ils ne seront plus nécessaires.

Cependant il faudra respecter une règle afin de pouvoir exploiter le tableau ainsi obtenu:

On représentera le graphe de la solution de transport (sommets: les « dépôts C_i» et les « clients P_j », arêtes: les arcs (C_iP_j) pour lesquels la solution actuelle envisage une quantité non-nulle à transporter de C_i vers P_j.

Remplacer des « 0 » par des ε>0 ajoute donc des arcs, **il faudra veiller à ce que le graphe ainsi modifié soit connexe et sans cycles.** (exemple TD).

(on notera qu'un graphe connexe maximal sans cycles avec ces m+n sommets aura justement m+n-1 arêtes, ce qui représente m+n-1 cases « non nulles », c'est à dire une solution non dégénérée).

2.4.2 face à une solution qui contient plus de m+n-1 cases non nulles

On négligera une ou plusieurs cases non nulles, pour n'en conserver que m+n-1, formant, comme au-dessus, un graphe connexe sans cycles.

Négliger ne veut pas dire « mettre à zéro », mais ne pas utiliser pour le calcul des potentiels.

Problème 1.

Problème de transport

Une entreprise dispose de 3 dépôts (D1,D2,D3) et de 3 magasins (M1,M2,M3); les stocks des dépôts sont $\begin{array}{ll} D1 & 1 \\ D2 & 4 \\ D3 & 4 \end{array}$

les besoins des magasins sont $\begin{array}{ll} M1 & 4 \\ M2 & 3 \\ M3 & 2 \end{array}$.

Le tableau suivant décrit les coûts unitaires de transport entre dépôts et magasins

	$M1$	$M2$	$M3$
$D1$	2	5	3
$D2$	4	5	4
$D3$	2	3	2

Voici une proposition de transport

	$M1$	$M2$	$M3$
$D1$	1	0	0
$D2$	1	3	0
$D3$	2	0	2

Déterminer seulement si c'est une solution de coût minimum.

Travaux dirigés- exercices à préparer

Exercice 1.

La société gadget fait appel pour la production de ses téléphones interconnectés à 3 fournisseurs qui seront désignés par A,B,C et elle possède deux plate-formes de distribution XX et YY.

Les capacités des usines sont, dans cet ordre, 1000, 1200 ,1500 containers par jour et les besoins des plate-formes de distribution sont, dans cet ordre, 2300 et 1400 par jour.

les coûts unitaires de transport sont

XX vers A 80, XX vers B 100, XX vers C 102

YY vers A 215, YY vers B 108, YY vers C 68

quel programme de transport faut-il décider pour assurer un coût total minimal ?

Exercice 2.

Formaliser un problème de transport

Soient m fournisseurs désignés par $C_1, ..., C_m$ et n clients désignés par $P_1, ..., P_n$; on désignera pour chaque i par c_i le stock du fournisseur C_i et pour chaque j par π_j la quantité commandée par le client P_j.

On désignera pour tout couple (i,j) par a_{ij} le coût de transport d'une unité du fournisseur C_i au client P_j.

On désignera pour chaque couple (C_i, P_j) par x_{ij} la variable égale au nombre dunités envoyées par le fournisseur C_i au client P_j.

Ecrire le système d'équation que vérifient les variables x_{ij}

Ecrire la fonction des variables x_{ij} que l'on veut minimiser (cad rendre la plus petite possible).

Exercice 3.

Pour être Superlow-cost

Une compagnie d'aviation dispose de trois bases opérationnelles A,B,C et peut acheter son carburant auprès de 3 fournisseurs a,b,c.

Les stocks de a,b,c sont respectivement de 2K,6K,6K litres et les besoins de A,B,C sont respectivement de 5K,3K,2K.

Les prix par litre (livraison comprise) sont donnés par le tableau

	A	B	C
a	3	1	1
b	6	2	2
c	1	9	12

(Euros); que faire pour minimiser les coûts d'approvisionnement?

Exercice 4.

Déterminer des entiers naturels $(x1, x2, x3, y1, y2, y3, z1, z2, z3)$ tels que

$$\begin{cases} x1 + x2 + x3 = 2 \\ y1 + y2 + y3 = 6 \\ z1 + z2 + z3 = 6 \\ x1 + y1 + z1 = 5 \\ x2 + y2 + z2 = 3 \\ x3 + y3 + z3 = 2 \end{cases}$$

et tels que 3x1+x2+x3+6y1+2y2+2y3+z1+9z2+12z3 soit minimal.

{ 3. Flot maximal à coût minimal (voir aussi chapitre flot maximal)

Notre problème peut aussi s'exprimer comme un cas particulier de recherche de Flot maximal à coût minimal dans un graphe G=(V,E) valué (avec les capacités des arcs: des entiers $c_{ij} \geqslant 0$) , dont les arcs (i,j) ont des coûts a_{ij} entiers positifs,

Interprétation du problème d'affectation en termes de flot maximal à coût minimal:

On définit le graphe bipartite G=(V,E) dont les sommets sont les 2n points $\{C_1, ..., C_n, P_1, ..., P_n\}$ et les arêtes sont les (C_i, P_j), de coûts respectifs (a_{ij}), on ajoute une source s, des arcs (s, C_i) de coût nul, un puits t, des arcs (j, t) de coût nul, et on attribue à chacun des arcs (les anciens comme les nouveaux) une capacité 1.

On définit le coût d'un flot φ comme la somme $\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} a_{ij}$; les flots maximaux existent et ont pour valeur n, on cherche un flot de valeur n et de coût minimal.

Objectifs:

1. Savoir reconnaître un problème de transport.
2. Savoir le résoudre par l'algorithme du marche-pied.