L'3 2012/2013 DE Théorie des graphes

Eléments de correction

Questions	I-1	I-2	I-3	II-1	II-2	II-3	III-1	III-2	IV-1	IV-2
Poids relatifs	1	2	2	5	2	1	4	3	4	1

Attention : les formulations ci-présentes ne sont pas nécessairement uniques ; il suffit que l'idée traduite par votre formulation reste la même.

I- Questions de cours

I-1. Quand dit-on qu'un graphe orienté est fortement connexe ?

Cf. cours

I-2. Quelle est la particularité de la matrice d'adjacence de la fermeture transitive d'un graphe orienté fortement connexe ? Justifiez votre réponse.

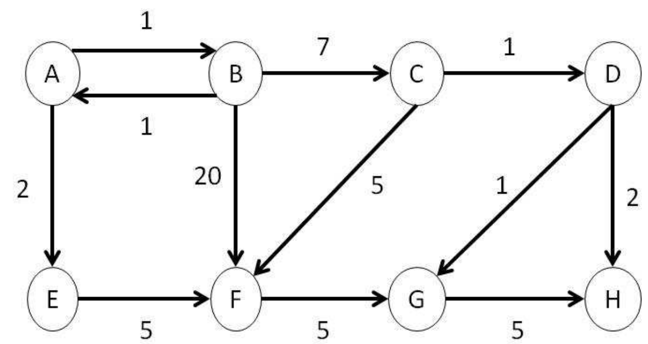
Des 'vrai' partout, car il existe alors un chemin de tout sommet vers tout sommet, y compris vers lui-même.

I-3. Lorsque l'on construit la matrice d'adjacence d'un graphe, quelle propriété rencontre-t-on qui soit toujours vraie lorsque le graphe est non orienté, mais pas toujours – que dans un cas très spécial – lorsque le graphe est orienté ? Expliquez pourquoi.

Elle est symétrique par rapport à sa première diagonale : une arête (x,y) représente une relation symétrique définie sur l'ensemble des sommets, et donc naturellement dans la matrice d'adjacence M[x,y] a toujours la même valeur que M[y,x].
Note: Pour avoir une telle symétrie en cas de graphe orienté, il faudrait que la relation soit orientée et symétrique, ce qui peut arriver occasionnellement mais n'est pas le cas général !

II- Chemin le plus court

II-1. Déroulez l'algorithme de DIJKSTRA avec le graphe suivant pour calculer les chemins les plus courts à partir du sommet 'A'.
Votre réponse doit indiquer clairement tous les résultats intermédiaires.



CC	M	A	B	C	D	E	F	G	H
A	BCDEFGH	0 A	1 A			2 A			
AB	CDEFGH	0 A	1 A	8 B		2 A	21 B		
ABE	CDFGH	0 A	1 A	8 B		2 A	7 E		
ABEF	CDGH	0 A	1 A	8 B		2 A	7 E	12 F	
ABCEF	DGH	0 A	1 A	8 B	9 C	2 A	7 E	12 F	
ABCDEF	GH	0 A	1 A	8 B	9 C	2 A	7 E	10 D	11 D
ABCDEFG	H	0 A	1 A	8 B	9 C	2 A	7 E	10 D	11 D
ABCDEFGH		0 A	1 A	8 B	9 C	2 A	7 E	10 D	11 D

II-2. Utilisez vos résultats pour indiquer la liste ordonnée des sommets constituant le chemin le plus court de A à G. Expliquez comment vous procédez.

L'algorithme donne, pour chaque sommet, son prédécesseur immédiat dans le chemin le plus court partant de A. Ainsi, dans le chemin le plus court de A à G, G a pour prédécesseur immédiat D, qui a lui-même pour prédécesseur immédiat C, et ainsi de suite.
En partant de G, on peut ainsi reconstituer le chemin recherché :

G ← D ← C ← B ← A

II-3. Supposez que le graphe contienne une boucle sur le sommet C, de valeur 1.
Qu'est-ce qui serait changé dans les résultats du déroulement de l'algorithme de Dijkstra ? Justifiez votre réponse.

Rien, car ce circuit de valeur positive n'appartient à aucun des chemins les plus courts (sa prise en compte ne ferait qu'augmenter la valeur des chemins).
De plus, les arcs issus de C ne sont considérés que lorsque C est passé dans l'ensemble CC, et a donc sa valeur associée définitive. L'algorithme ne prendra donc pas en compte l'arc C→C.

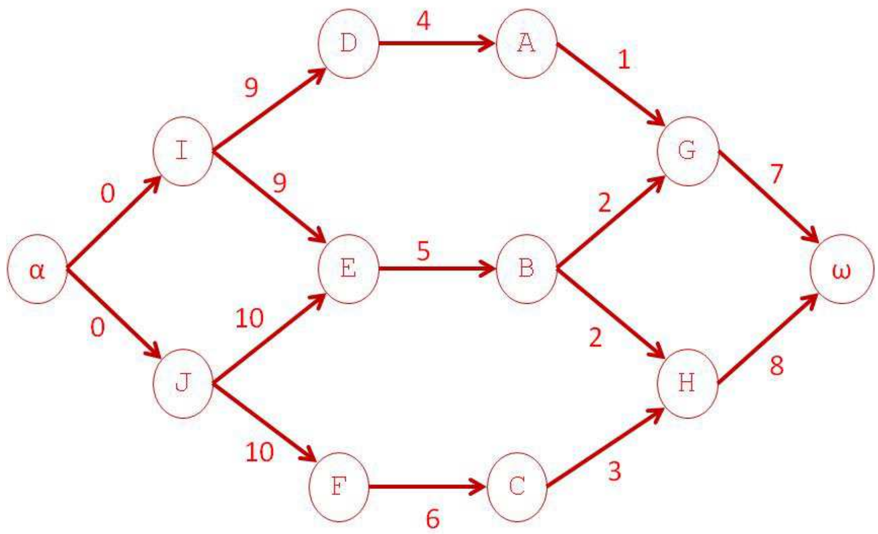
<u>III- Graphe d'ordonnancement</u>

Soit le tableau de contraintes suivant :

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Durées	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Contraintes	D	E	F	I	I et J	J	A et B	B et C	aucune	aucune

Interprétation du tableau par l'exemple :
La tâche F a une durée d'exécution de 6 unités de temps, et elle ne peut commencer que lorsque la tâche J est entièrement terminée. La tâche J a une durée d'exécution de 10 unités de temps, et n'a aucune contrainte pour démarrer.

III-1. Construisez et dessinez le graphe d'ordonnancement.

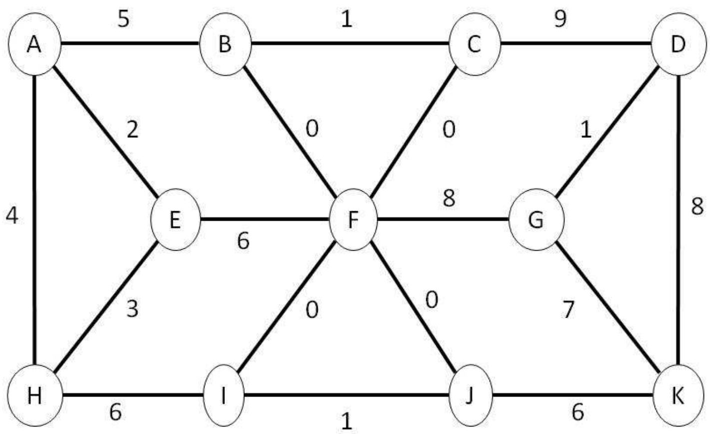


III-2. Calculez les calendriers « au plus tôt » et « au plus tard » du projet, en supposant que les dates au plus tôt et au plus tard de terminaison du projet sont égales.

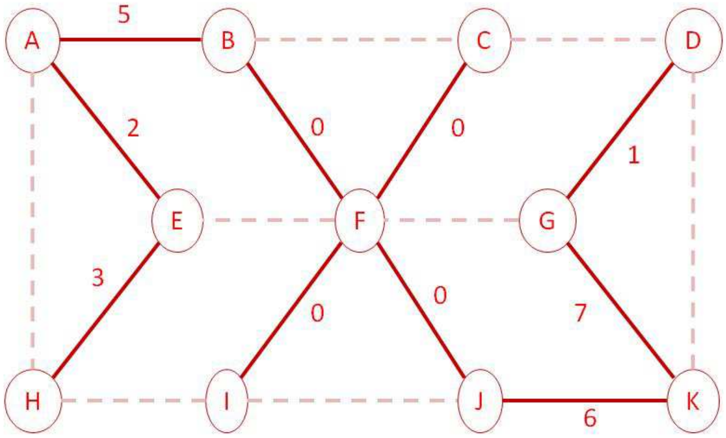
Dates :	α	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	ω
- au plus tôt	0	13	15	16	9	10	10	17	19	0	0	27
- au plus tard	0	19	17	16	15	12	10	20	19	3	0	27

<u>IV- Arbre couvrant</u>

Soit le graphe non orienté et valué suivant:



IV-1. Calculez un arbre couvrant de poids minimum en utilisant l'algorithme de votre choix parmi ceux vus en cours.
Votre réponse doit indiquer clairement : la méthode utilisée, l'ordre dans lequel les sommets et arêtes sont pris en compte, l'arbre couvrant ainsi que son poids.



Kruskall « constructif »
0 : BF / CF / FI / FJ
1 : ~~BC~~ / DG / ~~IJ~~
2 : AE
3 : EH
4 : ~~AH~~
5 : AB
6 : ~~EF~~ / ~~HI~~ / JK
7 : GK
8 : ~~FG~~ / ~~DK~~
9 : ~~CD~~

Kruskall « destructif »
9 : CD
8 : FG / DK
7 : ~~GK~~
6 : EF / HI / ~~JK~~
5 : ~~AB~~
4 : AH
3 : ~~EH~~
2 : ~~AE~~
1 : BC / ~~DG~~ / IJ
0 : ~~BF~~ / ~~CF~~ / ~~FI~~ / ~~FJ~~

Les arêtes barrées ci-dessus sont celles qui ne sont pas ajoutées pour Kruskall "constructif", ou qui ne sont pas supprimées pour Kruskall "destructif".

Prim : ordre selon le sommet de départ.

Poids = 24

IV-2. Décrivez une méthode pour calculer un arbre couvrant de poids maximum.

Cf cours