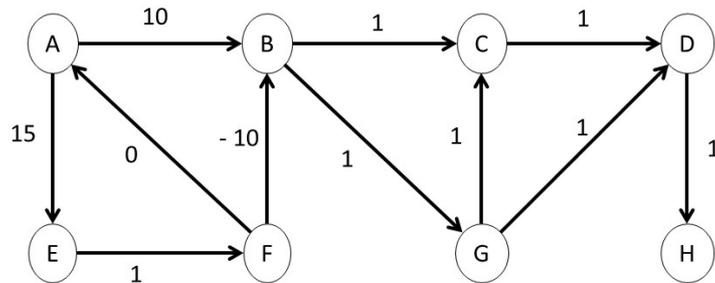


Éléments de correction.

Q1. Chemin le plus court

Soit le graphe ci-dessous :



Q1.1. Déroulez l'algorithme de Bellman pour rechercher les chemins les plus courts de 'A' vers tous les autres sommets.

k	A	B	C	D	E	F	G	H
0	0	∞						
1	0	10 A	∞	∞	15 A	∞	∞	∞
2	0	10 A	11 B	∞	15 A	16 E	11 B	∞
3	0	6 E	11 B	12 C	15 A	16 E	11 B	∞
4	0	6 E	7 B	12 C	15 A	16 E	7 B	13 D
5	0	6 E	7 B	8 C	15 A	16 E	7 B	13 D
6	0	6 E	7 B	8 C	15 A	16 E	7 B	9 D
7	0	6 E	7 B	8 C	15 A	16 E	7 B	9 D

Les chemins les plus courts peuvent être construits en reprenant les prédécesseurs de chaque sommet :

A
A E B
A E B C
A E B C D
A E
A E F
A E B G
A E B C D H

On peut les représenter sous forme d'un arbre

Q1.2. Peut-on également utiliser l'algorithme de Dijkstra ? Justifiez.

Non car il y a un arc avec une valeur négative.

Justification : cf. cours/TD.

Q1.3. Que se passerait-il si on remplaçait l'arc « D→H » par l'arc « H→D » avec la même valeur ? Quels seraient les résultats (pour chaque sommet) en fin de déroulement de l'algorithme ?

H deviendrait alors inaccessible depuis A. La valeur du chemin le plus court de A à H resterait donc égale à l'infini.

Les résultats seraient donc :

k	A	B	C	D	E	F	G	H
7	0	6 E	7 B	8 C	15 A	16 E	7 B	∞

Q1.4. Que se passerait-il si l'arc « $F \rightarrow A$ » avait pour valeur « -20 » au lieu de « 0 » ? Justifiez. Il y aurait alors création d'un circuit $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A$ de valeur négative (circuit absorbant), donc impossibilité de calculer les chemins de plus faible valeur.

L'algorithme de Bellman s'arrêterait donc à l'itération 8 sans avoir stabilisé les valeurs.

Q2. Ordonnancement

Soit le tableau suivant de description des tâches et contraintes d'un projet :

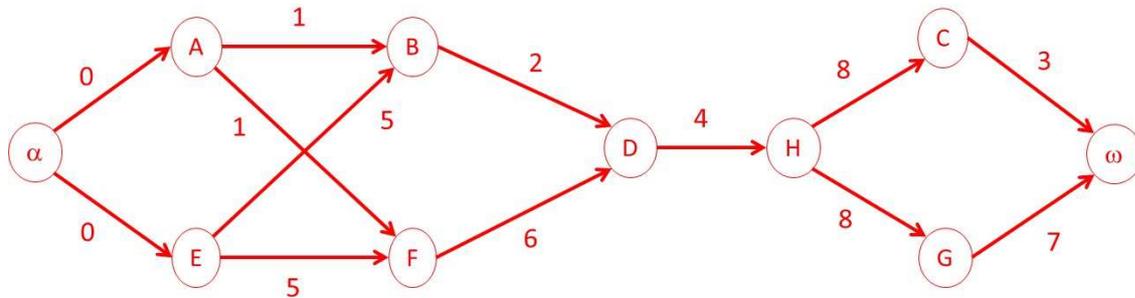
Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H
Durées d'exécution	1	2	3	4	5	6	7	8
Contraintes	Aucune	A et E	H	B et F	Aucune	A et E	H	D

Interprétation :

Par exemple, A, de durée 1, n'a aucune contrainte pour son début d'exécution, alors que F, de durée 6, ne peut commencer que lorsque A et E sont terminées.

Q2.1. Tracez le graphe d'ordonnancement correspondant à ce tableau.

Expliquez et justifiez la structure de votre graphe.



Explications / justifications : cf. cours/TD.

Q2.2. Calculez le calendrier au plus tôt et le calendrier au plus tard, en supposant que la date au plus tard de fin de projet est égale à sa date au plus tôt. Expliquez brièvement comment vous procédez.

Tâche	α	A	B	C	D	E	F	G	H	ω
Date + tôt	0	0	0	23	11	0	5	23	15	30
Date + tard	0	4	9	27	11	0	5	23	15	30

Explications : cf. cours/TD.

Q3. Détection de circuit

Pourquoi la méthode consistant à éliminer les points d'entrée et les points de sortie d'un graphe permet-elle de déterminer si le graphe de départ contient, ou non, un ou plusieurs circuits ?

Tout sommet appartenant à un circuit a au moins un prédécesseur et un successeur. Un point d'entrée (sans prédécesseur) ou de sortie (sans successeur) n'appartient donc à aucun circuit.

Éliminer un point d'entrée ou de sortie n'entraîne donc pas de suppression d'un circuit, s'il en existe un.

Dans un graphe, s'il n'y a plus aucun point d'entrée ni point de sortie dans un graphe, alors tout sommet appartient fatalement à un circuit (tout chemin partant d'un sommet « repassera » fatalement par ce même sommet).

En fin de processus de suppression, on obtiendra donc un graphe constitué uniquement des sommets appartenant à au moins un circuit dans le graphe de départ.

La présence ou non d'un circuit dans le graphe de départ est donc équivalente à la présence d'au moins un sommet ou non dans le graphe obtenu.

Q4. Algorithme

Soit l'algorithme suivant :

```
Soit x un sommet quelconque du graphe.
Soit E un ensemble de sommets initialisé à  $\emptyset$ 
Pour tout sommet y du graphe :
    si il existe un chemin de x à y
        alors ajouter y à E
Pour tout sommet y de E :
    si il existe un chemin de y à x
        alors supprimer y de E
si E =  $\emptyset$ 
    alors
        écrire « OUI »
sinon
    écrire « NON »
```

Quelle est la particularité que le graphe doit respecter pour que l'exécution de cet algorithme provoque l'écriture de « OUI » ? Expliquez.

```
Soit x un sommet quelconque du graphe.
Soit E un ensemble de sommets initialisé à  $\emptyset$ 
Pour tout sommet y du graphe :
    si il existe un chemin de x à y
        // y est un successeur direct ou indirect de x
        alors ajouter y à E
// E contient tous les successeurs directs ou indirects de x
Pour tout sommet y de E :
    si il existe un chemin de y à x
        // x est un successeur direct ou indirect de x
        // il y a donc un chemin de x vers y et
```

```

// un chemin de y vers x
// donc x et y appartiennent à un même circuit
alors supprimer y de E
si E = ∅
alors
// Tout successeur direct ou indirect de x appartient à un circuit passant par x.
// Tous les chemins passant par x sont des circuits, ou bien x n'a pas de successeur.
écrire « OUI »
sinon
écrire « NON »

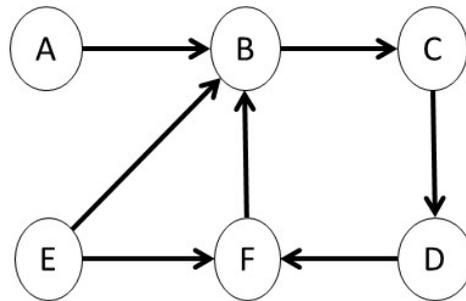
```

Q5. Rang

Calculez les rangs des sommets dans le graphe ci-contre.

Expliquez comment vous procédez, et ce qu'il se passe.

Justifiez.



Sommet	A	B	C	D	E	F
Rang	1	?	?	?	1	?

Calcul impossible !

Explications / justifications : présence d'un circuit.

fin