EFREI - Année 2015/2016

Théorie des Graphes
Exercices de Travaux Dirigés

I – MODELISATION DE PROBLEME A L'AIDE DE GRAPHE

Les exercices de cette première section consistent en la définition d'un graphe et l'identification d'une méthode algorithmique permettant de trouver la réponse à chaque problème.

I.1 - Conseil d'administration

Le Conseil d'Administration de l'institut X est composé de 7 personnes : D, P, G, H, K, S et V.
Chacune de ces personnes influence un certain nombre de ses collègues, conformément au tableau ci-contre.
Représentez ces influences au moyen d'un graphe, en définissant précisément ce que sont les sommets et les arêtes ou arcs de votre graphe.
Expliquez comment on peut alors calculer les jeux d'influence directe ou indirecte au sein du conseil.

M. ou Mme	Influence
D	H, S
G	--
H	G
K	P, V
P	H
S	K, P
V	H, P

I.2 - Bouteilles

Claude dispose d'une bouteille pleine contenant huit litres de vin.
Il a dans sa cave une bouteille vide de cinq litres, et une autre tout aussi vide de trois litres.
Aucune des 3 bouteilles n'est graduées, et leurs formes sont vraiment bizarres. Ceci implique que, partant de la bouteille pleine de 8 litres et de la bouteille vide de 5 litres, il n'est pas possible de verser 4 litres de la première dans la seconde puisqu'on n'a aucun moyen permettant de s'arrêter à 4 litres exactement. On ne maîtrise finalement que des transvasements qui consistent à vider entièrement une bouteille et/ou en remplir complètement une autre.
Claude désire partager le vin en deux parts de quatre litres chacune sans utiliser aucun autre moyen de mesure. Ces deux parts de quatre litres doivent être contenues dans deux bouteilles.
Indiquez-lui la façon de procéder au moyen d'un graphe.

Vous devez pour cela :
- définir le graphe que vous utilisez de façon formelle (sommets, arcs ou arêtes) ;
- le tracer ;
- énoncer la solution en terme de graphe et de problème que l'on résoud de façon classique sur un graphe.

I.3 - Diviseurs

On définit une relation R sur l'ensemble des 9 premiers entiers naturels non nuls comme suit :

$$x \mathrel{R} y \Leftrightarrow x \text{ est un diviseur de } y$$

1. Représentez cette relation par un graphe orienté.
2. Déterminez à partir du graphe l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs.
3. Ajoutez le '0' à votre graphe, et voyez si vos réponses à la question 2 sont toujours valables.

I.4 -- Passeur, chèvre, chou et loup

Une chèvre, un chou et un loup se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur souhaite les transporter sur l'autre rive mais, sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Comment doit-il procéder afin de ne jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre, ni la chèvre et le chou ?

Construisez le graphe et indiquez la méthode algorithmique à utiliser pour trouver la réponse.

I.5 -- Allumettes

Deux joueurs disposent de 2 ou plusieurs tas d'allumettes. A tour de rôle, chaque joueur peut enlever un certain nombre d'allumettes de l'un des tas. Le joueur qui retire la dernière allumette perd la partie. Modélisez ce jeu à l'aide d'un graphe dans le cas où on dispose au départ de 2 tas de 3 allumettes chacun, et où un joueur peut enlever une ou deux allumettes à chaque fois.

Comment peut-on trouver ce que le premier joueur doit jouer pour gagner la partie à coup sûr ?

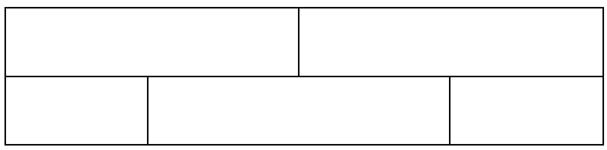
I.6 -- Echiquier

Essayez d'exprimer en termes de graphes les problèmes suivants :

- Peut-on placer huit dames sur un échiquier sans qu'aucune d'elles ne puisse en prendre une autre ?
- Un cavalier peut-il se déplacer sur un échiquier en passant sur chacune des cases une fois et une seule ?
- Combien doit-on placer de dames sur un échiquier 5x5 afin de contrôler toutes les cases ?

Là encore, énoncez les problèmes sans chercher à les résoudre…

I.7 -- Quadrillage



Comment trouver la réponse à la question suivante :
Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure ci-dessus ?

I.8 -- Permutations autour d'une table ronde

Un groupe de 9 élèves se réunit chaque jour autour d'une table ronde. On désire qu'au fil des jours, 2 élèves ne se retrouvent jamais plusieurs fois côte-à-côte.

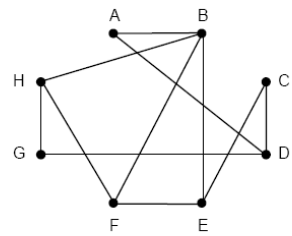
Comment procéder pour organiser des plans de table successifs en utilisant un graphe ?

Questions subsidiaires :

Combien de jours peuvent-ils se réunir tout en respectant cette contrainte ?
Même question pour 10 élèves, 11 élèves, n élèves.
Idem pour 9 élèves, mais avec 2 tables, l'une à 4 places et l'autre de 5 places.

I.9 -- Plan de table et incompatibilités

Un groupe de 8 personnes se retrouve pour dîner.
Le graphe ci-contre représente les "incompatibilités d'humeur" (ex. A ne s'entend pas avec B).



Comment déterminer un plan de table pour que la soirée se passe bien ?

II – REPRESENTATION ET ALGORITHMES GENERAUX

II.1 – Matrices incidence et adjacence / Demi-degré et degré / Successeurs et prédécesseurs

Utilisez le graphe qui vous est indiqué en séance pour :

1. Représenter les matrices d'adjacence et d'incidence aux arcs associées au graphe.

2. Calculer les demi-degrés et degrés des sommets à partir du graphe (schéma).

3. Déterminer les formules permettant de retrouver ces résultats à l'aide de chacune des deux matrices.

4. Calculer les ensembles $\Gamma^{+n}(x)$, pour $1 \leq n$, pour les sommets du graphe. Qu'en concluez-vous par rapport aux demi-degrés et degrés calculés ?

II.2 – SDD : représentation mémoire et manipulation de base

Etude des différentes représentations machine possibles pour un graphe.
Vous prendrez comme exemple le graphe qui vous sera indiqué en séance.
Remarque : les valeurs indiquées à côté des arcs sont les numéros des arcs.
Vous ferez d'abord l'exercice dans le cas de graphe non valué.
Ensuite, vous apporterez les modifications nécessaires à vos réponses dans le cadre de graphe valué.
Exercice à réaliser en C.

Dans un premier temps, pour chacune des représentations possibles :

- définissez les structures de données ;
- représentez graphiquement le graphe ci-dessus selon ces structures de données ;
- écrivez les formules ou algorithmes permettant de satisfaire aux opérations de bases telles que :
  - nombre de prédécesseurs, nombre de successeurs d'un sommet 'x' donné ;
  - impression de la liste des successeurs, liste des prédécesseurs d'un sommet 'x' donné ;
  - existence (vrai ou faux) d'un arc x→y ;
  - recherche du successeur pour lequel l'arc a la plus faible valeur
  - …

Dans un deuxième temps, discutez de l'efficacité de telle ou telle représentation pour effectuer telle ou telle opération

II.3 - Détection de circuit - Algorithme de Rosalind-Marimond

Ecrivez un algorithme permettant de détecter si un graphe contient ou non un circuit
Pour ce faire, vous pouvez partir des constats suivants :

- dans un circuit, tout sommet a au moins un prédécesseur et un successeur ;
- un point d'entrée n'a pas de prédécesseur ;
- un point de sortie n'a pas de successeur.

Déroulez l'algorithme sur l'exemple suivant :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Succ	5	4 7 8 12	7 10 11	8 11 12	12	1 3 10	10 12	11	5 7	5	12	□

II.4 - Chemins élémentaires et hamiltoniens

Soit les dominos suivants :

BE TE	SE ME	VE CU	LE SE	TE LE	RE MI
1	2	3	4	5	6

Règles :

1. on commence par "BE-TE" et on joue de la gauche vers la droite uniquement
2. deux dominos peuvent être mis côte-à-côte si la 2^{ième} partie du 1er domino forme un mot avec la 1ère partie du 2nd domino

et bien évidemment un domino ne peut être utilisé qu'une seule fois…

Construisez un graphe avec la règle 2.
Donnez toutes les configurations possibles du jeu avec les règles 1 + 2
Donnez toutes les configurations totales (incluant tous les dominos)

II.5 - Connexité d'un graphe

Soit x et y deux sommets d'un graphe,

x et y ont une relation de connexité *si et seulement si*
il existe une chaîne entre x et y *ou bien* x = y
x et y ont une relation de forte connexité *si et seulement si*
il existe un chemin de x à y et de y à x *ou bien* x = y

Un graphe est dit [fortement] connexe si tous ses nœuds ont deux à deux la relation de [forte] connexité.
Une composante [fortement] connexe est un ensemble de nœud qui ont deux à deux la relation de [forte] connexité ; et tel qu'aucun nœud de cet ensemble à la relation de [forte] connexité avec un élément en dehors de la composants.

Ecrivez un algorithme qui permet de déterminer la composante fortement connexe contenant un sommet donné.
Ecrivez un algorithme qui permet de trouver toutes les composantes fortement connexes d'un graphe.

II.6 – Parcours de graphe

Utilisez les graphes et les sommets de départs qui vous seront indiqués en séance afin d'effectuer des parcours en largeur d'abord et en profondeur d'abord.

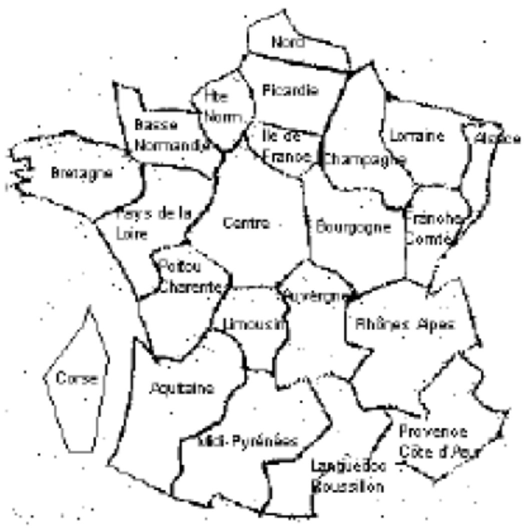
II.7 -- Algorithme de parcours dans un arbre

On souhaite représenter un "dictionnaire" sous la forme d'un arbre.
Dessinez tout d'abord l'arbre permettant de contenir les mots ABAT, ABIME, ACTE, ACTUEL.
Puis, ajoutez successivement les mots SOUTE, SORT et SOU.
Expliquez comment, à l'aide d'un tel arbre, il est possible de déterminer si un mot donné appartient ou non au dictionnaire.
Ecrivez enfin l'algorithme d'une fonction qui détermine si un "mot" appartient ou non à un "dictionnaire" ("mot" et "dictionnaire" sont les paramètres de cette fonction).

II.8 - Coloration de carte

On veut colorier chaque région administrative française (métropole + Corse) de telle sorte que deux régions voisines ne soient pas de la même couleur.

Représenter le problème sous la forme d'un graphe.
Décrivez et déroulez l'algorithme permettant de résoudre ce problème.



III – CHEMIN DE VALEUR MINIMALE

III.1 - Recherche du chemin le plus court

Déroulez les algorithmes de Dijkstra, Bellman et Floyd pour la recherche des « plus courts chemins », sur les graphes donnés en annexe.

Les graphes à utiliser en priorité vous seront indiqués en séance de TD.

IV – ORDONNANCEMENT

IV.1 – Construction de graphe

Construisez les graphes d'ordonnancement pour les tableaux de contraintes donnés en annexe.

Les tableaux à utiliser en priorité vous seront indiqués en séance de TD.

IV.2 – Calendriers et marges

Reprenez les graphes utilisés dans l'exercice précédent et calculez :
- le calendrier « au plus tôt » du projet ;
- le calendrier « au plus tard » en ajoutant une marge de 2 unités de temps pour la fin de projet (i.e. date au plus tard de fin de projet = date au plus tôt de fin de projet +2) ;
- les marges libres et totales.

IV.3 - Réduction d'un graphe d'ordonnancement

Un graphe d'ordonnancement dérivé directement d'un tableau de contrainte peut contenir des arcs inutiles.
Par exemple, parmi un ensemble d'arcs

A→B, B→C, C→D, D→E, A→C, A→E

les arcs A→C et A→E sont inutiles.
Trouvez une méthode et imaginez un algorithme pour éliminer ces arcs (contraintes) superflus.

V – ARBRE

V.1 - Mise en oeuvre d'un arbre

Décrivez des représentations possibles en mémoire d'un arbre.

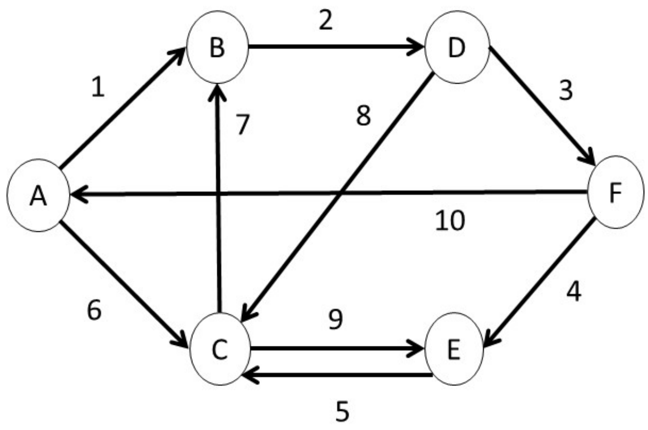
V.2 - Arbre couvrant

Déroulez les algorithmes de Kruskall et Prim pour rechercher des arbres couvrants de valeur minimale pour les graphes donnés en annexe.
Vous ne tiendrez pas compte de l'orientation des arcs de ces graphes, et considérerez donc des graphes valués non orientés.

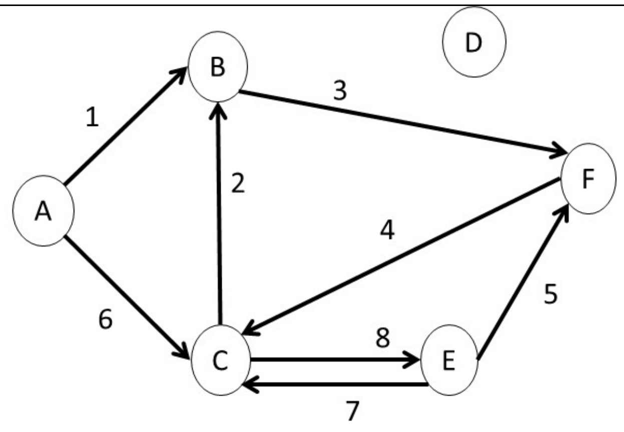
Les graphes à utiliser en priorité vous seront donnés lors des séances de TD.

ANNEXE

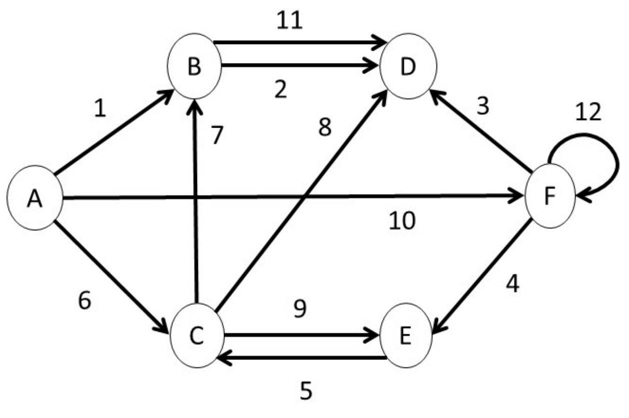
Graphes



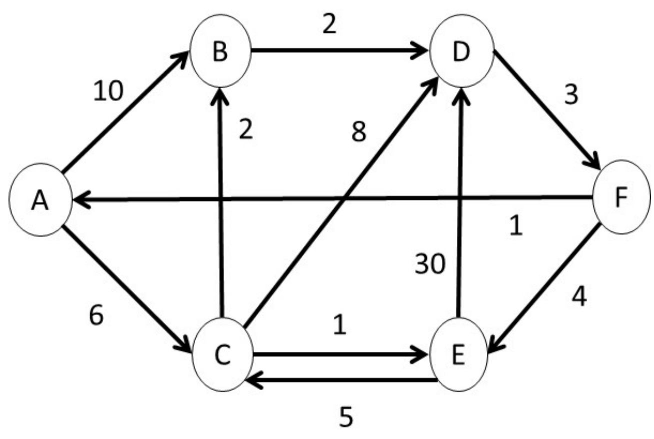
Les nombres sont les numéros des arcs

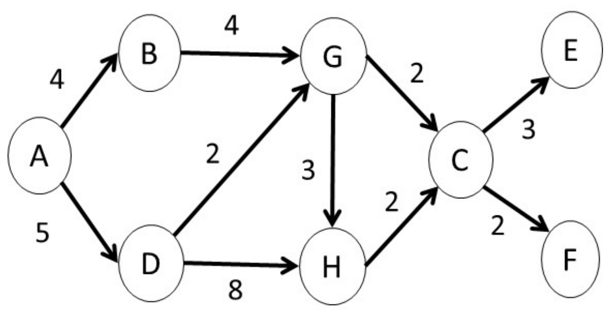


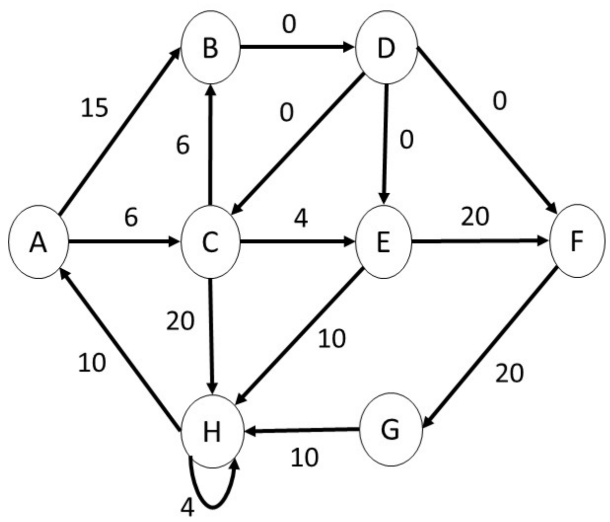
Les nombres sont les numéros des arcs

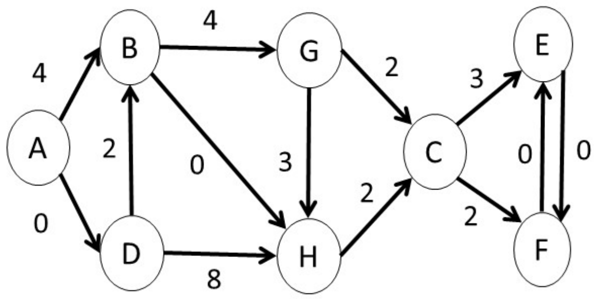


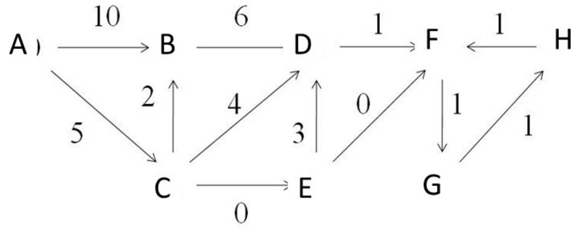
Les nombres sont les numéros des arcs

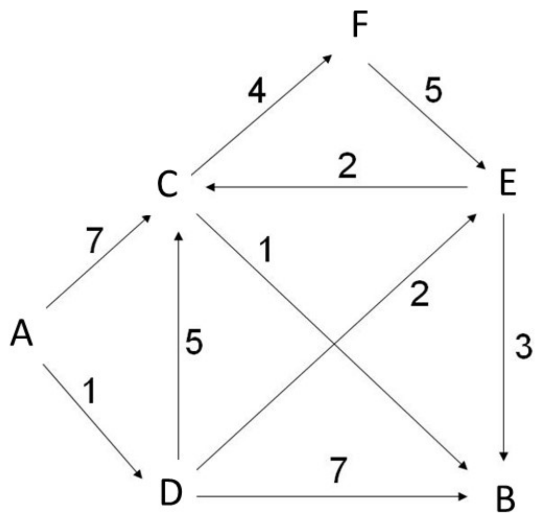


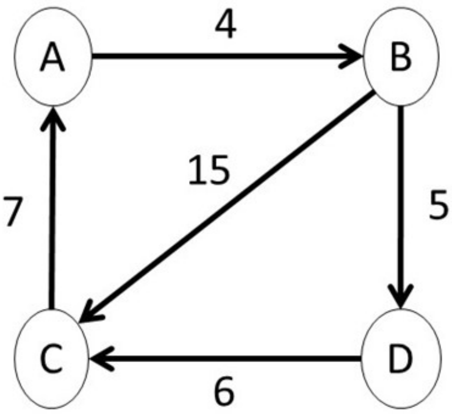

4
B
G
E
4
2
3
A
2
3
C
2
5
2
D
H
F
8

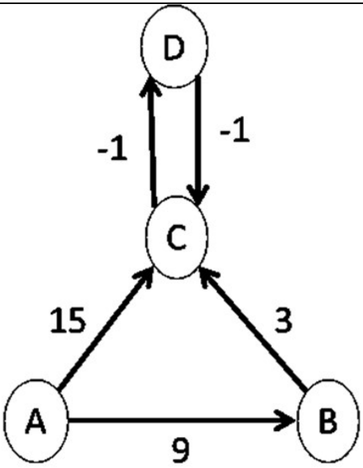

B
0
D
15
0
0
6
0
A
6
C
4
E
20
F
20
10
10
20
H
G
10
4

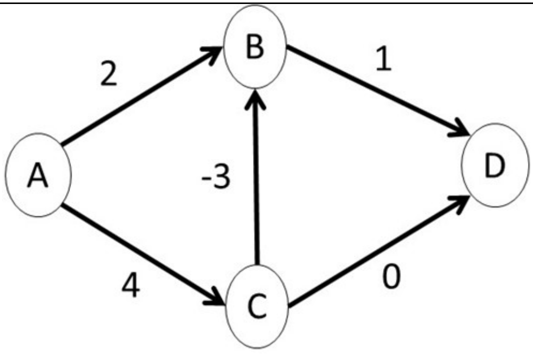

4
B
G
E
4
2
3
A
2
0
3
C
0
0
0
2
2
D
H
F
8

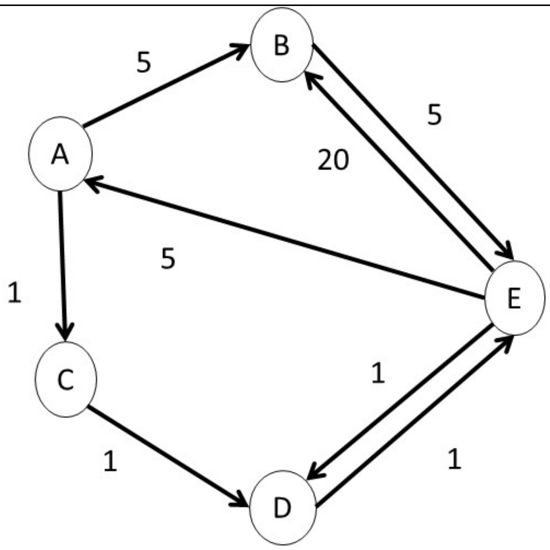

A
10
B
6
D
1
F
1
H
2
4
0
1
5
3
1
C
E
G
0

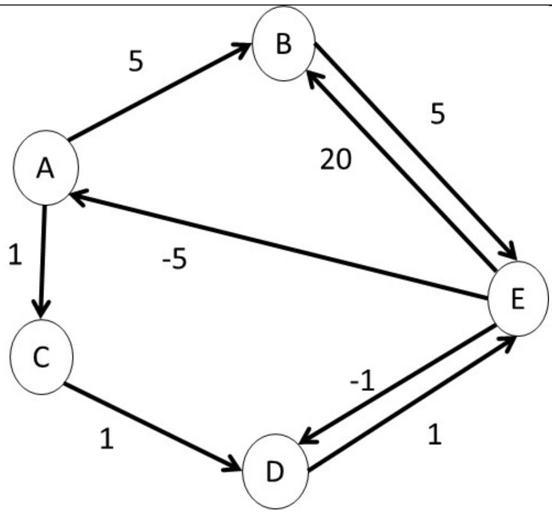

F
4
5
C
2
E
7
1
2
A
5
3
1
D
7
B


A
4
B
15
7
5
C
D
6

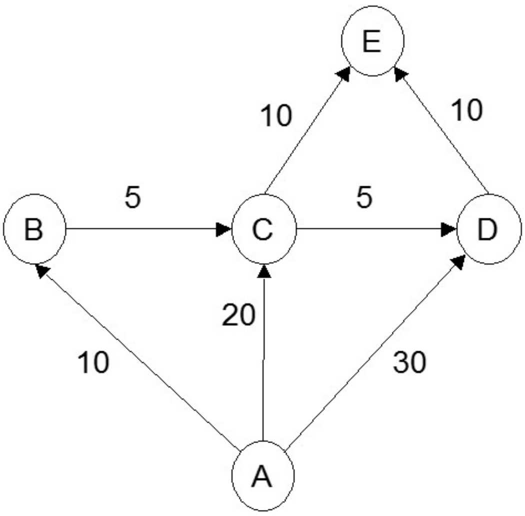

D
-1
-1
C
15
3
A
9
B


B
2
1
A
-3
D
4
0
C

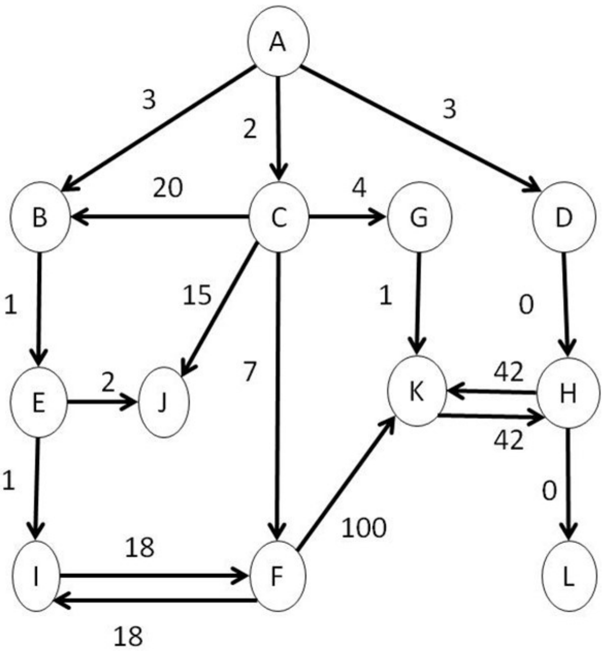

B
5
5
A
20
5
1
E
C
1
1
1
D


B
5
5
A
20
1
-5
E
C
-1
1
1
D

G52


E
10
10
B
5
C
5
D
20
10
30
A

G53


A
3
2
3
20
4
B
C
G
D
1
15
1
0
7
42
E
2
J
K
H
42
1
0
100
18
I
F
L
18

Tableaux de contraintes

Les contraintes sont toutes de la forme « X doit être terminée avant de commencer Y ».

C01

	Tâche	Durée	Contraintes
1	A	9	Aucune
2	B	2	Aucune
3	C	3	B
4	D	5	A
5	E	2	A D
6	F	2	E
7	G	2	D
8	H	4	D E
9	I	5	D
10	J	1	B C
11	K	2	A E F G H

C02

	Tâche	Durée	Contraintes
1	A	2	Aucune
2	B	5	Aucune
3	C	4	A
4	D	2	A B
5	E	5	D
6	F	5	E
7	G	9	F
8	H	2	G
9	I	5	E F G H
10	J	1	K
11	K	1	D
12	L	1	C
13	M	9	D F L

C03

	Tâche	Durée	Contraintes
1	A	2	Aucune
2	B	5	Aucune
3	C	4	A B D
4	D	2	B
5	E	5	D
6	F	5	E
7	G	9	F
8	H	1	D F G L
9	I	5	E F G
10	J	9	K
11	K	1	D
12	L	1	C

C04

	Tâche	Durée	Contraintes
1	A	3	Aucune
2	B	2	Aucune
3	C	3	B
4	D	5	A
5	E	4	D
6	F	2	E
7	G	2	D
8	H	4	E G
9	I	5	D
10	J	1	C I
11	K	2	F H

C05

	Tâche	Durée	Contraintes
1	A	2	Aucune
2	B	5	Aucune
3	C	4	A
4	D	2	B C
5	E	5	D
6	F	5	E
7	G	9	F
8	H	2	G
9	I	5	H
10	J	1	K
11	K	1	D
12	L	1	C
13	M	9	F L