Cours L3
Théorie du signal

<u>DISTRIBUTIONS</u> (éléments)

Introduction

Nous savons que l' » échelon d'Heaviside » n'est pas dérivable. Pour tenter d'écrire une dérivée, on peut définir cet échelon par un passage à la limite par

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 \quad pour \quad x \in]-\infty, 0[\\ nx \quad pour \quad x \in [0, 1/n] \\ 1 \quad pour \quad x \in]1/n, \infty[\end{cases}$$

Avec $H_n(x)$ dérivable partout sauf en 0 et en $1/n$

Et ainsi : $H(x) = \lim_{n \to \infty} H_n(x)$

Ainsi les dérivées s'écriraient :

$H_n^{'}(x) = n 1\!\mathrm{I}_{[0,1/n]}(x)$ et on serait tenter d'écrire $H'(x) = \lim_{n \to \infty} H_n^{'}(x)$

Or le passage à la limite de $H_n^{'}(x)$ montre que ce que nous obtenons, qui pourrait physiquement prendre la grandeur d'une tension induite par un courant $H_n(x)$ traversant une inductance, pose quelques problèmes.
En effet, cette dérivée, tendrait vers une fonction de mesure nulle, qui ne transporte donc pas d'énergie !

$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^{'}(x)dx = 1$ et converge presque partout vers 0 quand $n \to \infty$ mais ne converge pas au sens de l'énergie.
En conséquence, le concept de fonction pose un problème pour définir certains phénomènes.

<u>Espace $\mathfrak{D}$</u>
Définition : espace des fonctions indéfiniment dérivables à support borné
Exemple :

$$\varphi(x) = \exp \frac{-1}{1-x^2} 1\!\mathrm{I}_{]-1,1[}(x)$$

Dans le cas des fonctions, $f : x \to f(x)$

Dans le cas des distributions :

$$\varphi \in \mathfrak{D} \to \textit{élément de } \mathbb{R} \textit{ ou } \mathbb{C}$$

Remarque : $\mathfrak{D}$ est un espace fonctionnel c'est à dire un espace de fonctions ayant une structure d'espace vectoriel ;

I- Rappels de convergence simple (ou ponctuelle) et uniforme :

I1-Convergence simple :

$$\forall \varepsilon \rangle 0, \quad \forall x, \quad \exists N(\varepsilon, x) \quad | \, k \geq N, \left| f_k(x) - f(x) \leq \varepsilon \right|$$

Ou :

Soit I un intervalle et $f_k(x)$ une suite de fonctions définies sur I et $f(x)$ définie sur I : alors $f_k(x)$ CVS vers $f(x)$, $\forall x$ quand $k \to \infty$, si

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$$

I2-Convergence uniforme :

$$\forall \varepsilon \rangle 0, \quad \exists N(\varepsilon) \quad | \, k \geq N, \quad \forall x \quad \left| f_k(x) - f(x) \leq \varepsilon \right|$$

Ou :

Soit I un intervalle et $f_k(x)$ une suite de fonctions définies sur I et $f(x)$ définie sur I : alors $f_k(x)$ CVU vers $f(x)$ si

$$\sup_{x \in I} \left| f_k(x) - f(x) \right| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Exemple : $f_k(x) = kxe^{-k|x|}$

$$f_k(x \neq 0) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

$$f_k(x = 0) = 0$$

$$f_k(x) \xrightarrow[k \to \infty]{} f(x) = 0 \quad \text{donc : } f_k(x) \xrightarrow{CVS} f(x)$$

Et :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_k(x) - f(x) \right| \xrightarrow[k \to \infty]{nonCVU} \neq 0$$

Remarque :

$$CVU \Rightarrow CVS$$

Voire
$$CVNormale \Rightarrow CVU \Rightarrow CVS$$
$$et \quad CVNormale \Rightarrow CVabsolue \Rightarrow CVS$$

I3- convergence dans $\mathfrak{D}$

La suite de fonctions $\varphi_k(x)$

$$\varphi_k(x) \xrightarrow{CV\mathfrak{D}} \varphi(x)$$

Si :

a. les $\varphi_k(x)$ ont toutes leur support sur un même support indépendant de k

b. $\varphi_k^{(m)}(x) \xrightarrow{CVU} \varphi^{(m)}(x)$

Par ailleurs une fonction ne représente pas bien un phénomène physique :
En effet, il existe un théorème indiquant que :

$\forall \varepsilon \rangle 0, \quad \exists \varphi(x) \in \mathfrak{D}, \quad \forall x, \left| f(x) - \varphi(x) \right| \leq \varepsilon$ pour toute fonction $f(x)$ continue à support borné

II Définition d'une distribution

$\mathfrak{D} : \varphi(x) \to \quad scalaire \quad \in \mathbb{R}\, ou\, \mathbb{C}$

Une distribution est une application (ou fonctionnelle) linéaire et continue définie sur $\mathfrak{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. Une distribution est une fonctionnelle.

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} T(x)\varphi(x)dx = \left(T, \varphi\right)$$

1-linéaire

$$\text{a) } \langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle$$
$$\text{b) } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \langle T, \lambda\varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$$

2-continue

Si $\varphi_k(x) \xrightarrow{CV\mathfrak{D}} \varphi(x)$

$\forall \varepsilon \rangle 0, \quad \exists N(\varepsilon), \quad | \, k \geq N, \quad \left| \langle T, \varphi_k(x) \rangle - \langle T, \varphi(x) \rangle \right| \leq \varepsilon$

Exemple :

Toute fonction localement sommable ; f_{Loc} définit une distribution

En effet :

$$\left| \langle T, \varphi_k(x) \rangle - \langle T, \varphi(x) \rangle \right| = \left| \int_a^b f(x) \left[\varphi_k(x) - \varphi(x) \right] dx \right|$$

$$\leq \int_a^b \left| f(x) \right| \left| \varphi_k(x) - \varphi(x) \right| dx \leq \sup \left| \varphi_k(x) - \varphi(x) \right| \int_a^b \left| f(x) \right| dx \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Les fonctions localement sommables définissent des distributions régulières.
On notera $\mathfrak{D}'$ l'ensemble des distributions
Propriété : les distributions forment un e.v

III- Opérations

1- Addition

$$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle$$

2- Multiplication par un scalaire

$$\langle \lambda T, \varphi \rangle = \langle T, \lambda \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$$

3- Translation

$$\langle T(x-a), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(x+a) \rangle$$

4- Transposition

$$\langle T(-x), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(-x) \rangle$$

5- Changement d'échelle

$$\langle T(ax), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T(x), \varphi(\frac{x}{a}) \rangle$$

<u>Distributions singulières</u>
Distribution de Dirac au point x=a est notée

$$\delta_{(x-a)} = \delta_{(x=a)} = \delta_a$$

Théorème :

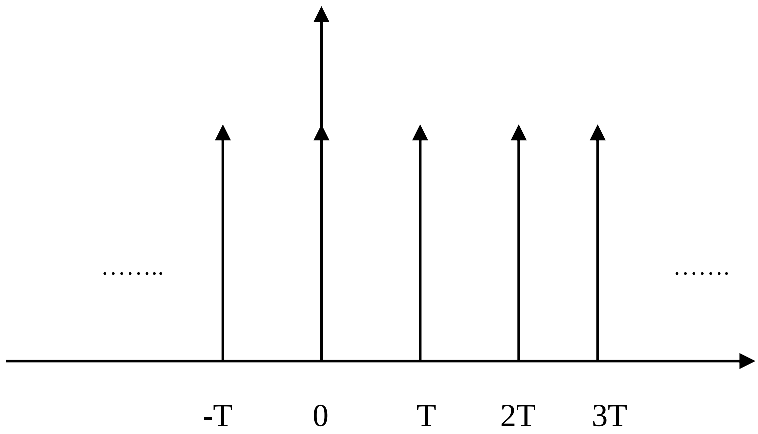
$$soit \quad f_n \quad n \in \mathbb{N}, \quad une\ suite\ de\ fonctions \rangle 0 \mid \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = 1 \quad \forall\ n$$

Soit

$$et \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(x)dx = 1 \quad \forall \varepsilon, \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathfrak{D}'} \delta(x)$$

Un peigne de Dirac est noté

$$Ш\left(x\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x - nT\right)$$



Ainsi :

$$\left\langle \delta(x), \varphi(x) \right\rangle = \varphi(0) \quad ou \quad \left\langle \delta, \varphi \right\rangle = \varphi(0)$$

$$\left\langle \delta(x-a), \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \delta(x), \varphi(x+a) \right\rangle = \varphi(a)$$

$$\left\langle \delta(-x), \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \delta(x), \varphi(-x) \right\rangle = \varphi(0)$$

$$\left\langle \delta(ax), \varphi(x) \right\rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle \delta(x), \varphi(\frac{x}{a}) \right\rangle = \frac{1}{|a|} \varphi(0) = \left\langle \frac{1}{|a|} \delta(x), \varphi(x) \right\rangle$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

6- Multiplication de 2 distributions

Si f_{Loc} et g_{LOC} , elles définissent chacune une distribution

Si fg n'est pas localement sommable, alors ce produit fg ne définit pas une distribution.

Ex : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ définit une distribution

Mais $\dfrac{1}{|x|}$ ne définit pas une distribution

Si Ψ est une fonction $\mathcal{C}^{\infty}$ alors $T\Psi$ a un sens.

Ex :

$$\left\langle x\delta(x), \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \delta(x), x\varphi(x) \right\rangle = (x\varphi(x))_0 = 0$$

$$et \quad x\delta(x) = 0$$

7- Dérivation

$$\left\langle T', \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \varphi' \right\rangle$$

En effet :

En considérant des fonctions localement sommables pour le démontrer :

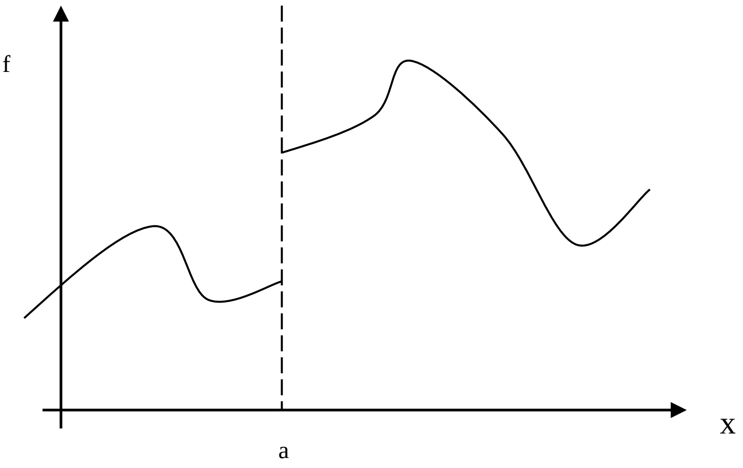
$$\left\langle f',\varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \left[f(x)\varphi(x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

En généralisant :

$$\left\langle T^{(m)},\varphi \right\rangle = (-1)^m \left\langle T,\varphi^{(m)} \right\rangle$$

Ex :



$$\left\langle f',\varphi \right\rangle = -\left\langle f,\varphi' \right\rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

$$= -\left[f(x)\varphi(x) \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$

$$= -\left[f(x)\varphi(x) \right]_{-\infty}^{a^-} + \int_{-\infty}^{a^-} f'(x)\varphi(x)dx - \left[f(x)\varphi(x) \right]_{a^+}^{\infty} + \int_{a^+}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$

$$= f(a^+)\varphi(a^+) - f(a^-)\varphi(a^-) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$

$$= \left\langle \sigma_a \delta(x=a) + f',\varphi \right\rangle$$

Avec $\sigma_a = f(a^+) - f(a^-)$

Soit

$$\left[f \right]' = \left[f' \right] + \sigma_0^a \delta(x-a)$$

$$\left[f \right]'' = \left[f'' \right] + \sigma_1^a \delta(x-a) + \sigma_0^a \delta'(x-a)$$

$$\left[f\right]^{(m)} = \left[f^{(m)}\right] + \sum_{i=1}^{m} \sigma_{m-i}^{a}\delta^{(i-1)}(x-a)$$

Exemples de calculs

Exemples de dérivée :

1-

$$\langle x\delta',\varphi\rangle = \langle \delta',x\varphi\rangle = -\langle \delta,(x\varphi)'\rangle = -(x\varphi)'\big|_{x=0}$$

$$-(\varphi+x\varphi')\big|_{x=0} = -\varphi(0) = \langle -\delta,\varphi\rangle$$

Et $x\delta'=-\delta$

2-

Calcul de $(\Psi T)'=?$ avec Ψ étant $\mathcal{C}^{\infty}$

$$\langle (\Psi T)',\varphi\rangle = -\langle \Psi T,\varphi'\rangle = -\langle T,\Psi\varphi'\rangle = -\langle T,(\Psi\varphi)'-\Psi'\varphi\rangle$$

$$=-\langle T,(\Psi\varphi)'\rangle+\langle T,\Psi'\varphi\rangle=\langle T',\Psi\varphi\rangle+\langle T\Psi',\varphi\rangle$$

$$= \langle T'\Psi+T\Psi',\varphi\rangle$$

Et $(\Psi T)'=\Psi' T+\Psi T'$

3-

Calcul de ‘dérivée de la distribution d’Heaviside’

$H' = ?$

$$\langle H',\varphi\rangle = -\langle H,\varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta,\varphi\rangle$$

Ainsi $H'=\delta$

Exemple de convergence :

$\lim\limits_{k\to\infty} \sin kx = ?$ ne converge pas p.p. mais converge dans $\mathcal{D}'$ vers 0

$$\lim_{k\to\infty} \langle \sin kx,\varphi\rangle = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sin kx\, \varphi(x)dx =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left\{ \left[-\frac{1}{k}\cos kx.\varphi(x)\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k}\cos kx.\varphi'(x)dx \right\} = 0$$

8-Convolution

a) au sens des fonctions

quand il existe le produit de convolution de 2 fonctions s’écrit :

$$f*g|_{(x)} = \int f(t)g(x-t)dt$$

Conditions d'existence :

$$1-\ f\in L^1_{\mathbb{R}}\quad et\quad g\in L^1_{\mathbb{R}}\Rightarrow f*g\in L^1_{\mathbb{R}}$$

$$2-f\in L^1_{\mathbb{R}}\quad et\quad g\in L^2_{\mathbb{R}}\Rightarrow f*g\in L^2_{\mathbb{R}}$$

$$3-\ f\in L^2_{\mathbb{R}}\quad et\quad g\in L^2_{\mathbb{R}}\Rightarrow f*g\quad\exists$$

b) au sens des distributions

soit 2 fonctions localement sommables : on peut définir le produit de convolution et de plus elles définissent des distributions.
Nous allons le calculer et l'étendre, sans le démontrer à l'ensemble des distributions

$$\langle f*g,\varphi\rangle=\int(f*g)_{(x)}\varphi(x)dx=\int\left[\int f(t)g(x-t)dt\right]\varphi(x)dx$$

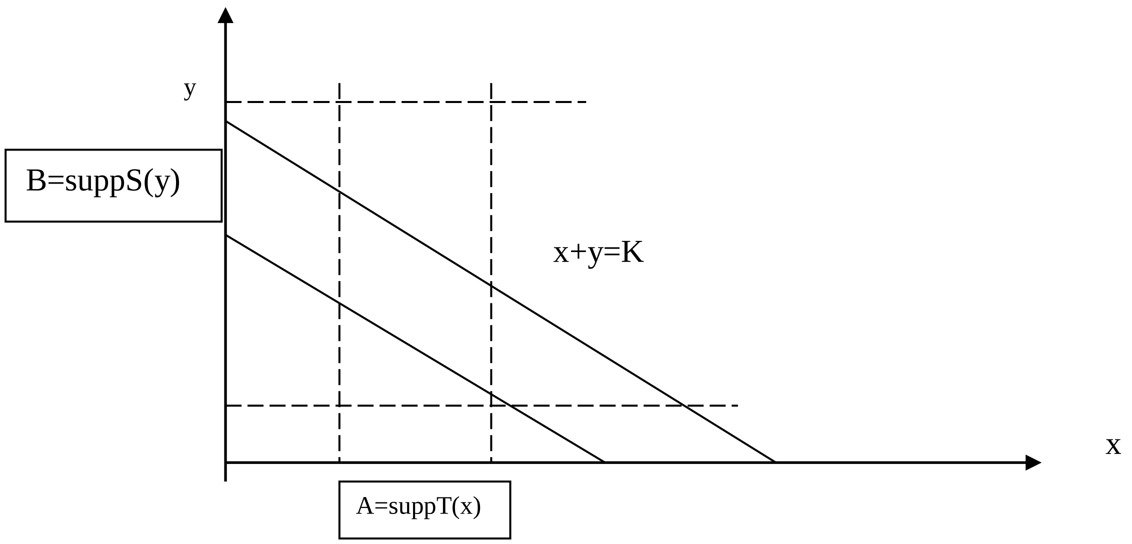
$$=\iint f(t)g(x-t)\varphi(x)dtdx=en\ posant\quad x-t=y\ et\ t=t$$

$$=\int_{\mathbb{R}^2} f(t)g(y)\varphi(y+t)dtdy=\langle f(t)g(y),\varphi(y+t)\rangle$$

En généralisant, nous obtenons pour les distributions :

$$\langle T*S,\varphi\rangle=\langle T(x),\langle S(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle$$

Conditions d'existence :
Il faut que quelque soit la bande parallèle à la 2[ième] bissectrice
$E\bigcap[A\times B]$ soit bornée.



a) si T (ou S) à support borné
b) si T et S $\in\mathcal{D}'_+$ ou $\mathcal{D}'_-$

théorème : le produit de convolution est associatif si tous les produits 2 à 2 ont un sens

Quelques applications du produit de convolution.

a-Translation

$$\delta(x-a)*T(x) = ?$$

$$\left\langle \delta(x-a)*T(x),\varphi(x)\right\rangle=\left\langle \delta(x-a),\left\langle T(y),\varphi(x+y)\right\rangle\right\rangle$$

$$=\left\langle T(x),\left\langle \delta(y-a),\varphi(x+y)\right\rangle\right\rangle=\left\langle T(x),\left\langle \delta(y),\varphi(x+y+a)\right\rangle\right\rangle$$

$$=\left\langle T(x),\varphi(x+a)\right\rangle = \left\langle T(x-a),\varphi(x)\right\rangle$$

Donc :

$$\delta(x-a)*T(x)=T(x-a)$$

En faisant a=0, on constate que la distribution de Dirac est l'élément neutre pour la convolution.

Attention :

$$\delta(x-a).\varphi(x)=\delta_{x=a}.\varphi(x)=\delta_{x=a}.\varphi(a)$$

b- Convolution par δ'

$$\delta'*T = ?$$

$$\left\langle \delta'*T,\varphi\right\rangle=\left\langle \delta'(x),\left\langle T(y),\varphi(x+y)\right\rangle\right\rangle$$

$$=\left\langle T(x),\left\langle \delta'(y),\varphi(x+y)\right\rangle\right\rangle=-\left\langle T(x),\left\langle \delta(y),\frac{\partial\varphi(x+y)}{\partial y}\right\rangle\right\rangle$$

$$= -\left\langle T(x),\varphi'(x)\right\rangle = \left\langle T'(x),\varphi(x)\right\rangle$$

Donc : $\delta'*T=T'$

c-Dérivée d'un produit de convolution

$$si \quad T*S \quad \exists$$

$$(T*S)'=(T*S)*\delta'=T*S*\delta'=S*T*\delta'$$

$$= T*S' = \quad ou \quad = T'*S$$

Attention :

$1*H*\delta'$ n'a pas de sens (voir théorème ci-dessus)

Convolution d'une distribution avec une fonction $\mathcal{C}^\infty$

$$(T*\Psi)_{(x)}=\left\langle T(t),\Psi(x-t)\right\rangle$$

Si Ψ est de degré m :

$$(T*\Psi)_{(x)}=\left\langle T(t),\Psi(x-t)\right\rangle=\left\langle T(t),\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!}\Psi^{(n)}(-t)\right\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} \left\langle T(t), \Psi^{(n)}(-t) \right\rangle \text{ de degré m}$$

IV- Algèbre de convolution

Définition : Une algèbre de convolution est un e.v de distributions contenant δ et dans lequel on peut définir le * d'un nombre fini qcqn de distributions.
Intérêt : analyse de circuits

$a_0 X(t) + a_1 X'(t) + \ldots + a_n X^{(n)} = B(t)$

Qui peut s'écrire :

$(a_0 \delta + a_1 \delta' + \ldots + a_n \delta^{(n)}) * X(t) = B(t)$

$A(t) * X(t) = B(t)$

On note : A^{*-1} la distribution telle que :

$A * A^{*-1} = \delta$

Ainsi :

$A^{*-1} * A * X = A^{*-1} * B$

Soit $X = A^{*-1} * B$

V-Transformée de Fourier

1- au sens des fonctions
Définition

$$si \quad f \in L^1(\mathbb{R}) \quad alors \quad \hat{f}(\upsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi\upsilon x} dx$$

Théorème : toute fonction sommable (au sens de Lebesgue) a une transformée de Fourier $\hat{f}(\upsilon)$. On démontre qu'elle est continue, bornée, tendant vers 0 quand $|\upsilon| \to \infty$.

Inversion (si f est continue)

$$si \quad \hat{f}(\upsilon) \in L^1(\mathbb{R}) \quad alors \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\upsilon) e^{j2\pi\upsilon x} d\upsilon$$

Théorème : si $f(x)$ est une fonction sommable présentant un nombre fini de discontinuités, la formule d'inversion conduit à $\frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-) \right]$

Où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ sont les limites à droite et à gauche de $f(x)$.

$$\frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-) \right] = \lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\upsilon) e^{j2\pi\upsilon x} d\upsilon$$

Rq : Si $f(x)$ est continue, on retrouve la formule d'inversion
Transformées en cosinus et sinus
Toute fonction peut être décomposée en une fonction paire et une fonction impaire

$$f(x)=p(x)+q(x)$$

Où :

$$p(x) = \frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right]$$

$$q(x) = \frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right]$$

Ainsi :

$$\hat{f}(\upsilon) = \underbrace{2\int_0^\infty p(x)\cos 2\pi\upsilon x.dx}_{\mathscr{F}_{\cos}[p(x)]} - j\underbrace{2\int_0^\infty q(x)\sin 2\pi\upsilon x.dx}_{\mathscr{F}_{\sin}[q(x)]} = \mathscr{F}_{\cos}\left[p(x)\right] - j\mathscr{F}_{\sin}\left[q(x)\right]$$

Quelques propriétés de la Transformée de Fourier .
Nous ne les démontrerons pas car très simples mais nous les reverrons avec les transformées des distributions.

a) linéarité
b) transposition
c) changement d'échelle
d) translation
e) modulation
f) dérivation /variable « x » (temporelle)

plus $f(x)$ est dérivable, à dérivées sommables, plus $\hat{f}(\upsilon)$ décroît rapidement à ∞

g) dérivation /variable « υ » (fréquentielle)

plus $f(x)$ décroît à l' ∞, plus $\hat{f}(\upsilon)$ est dérivable (avec des dérivées bornées)

h) convolution
i) formule de Parseval-Plancherel

$$\langle f,g\rangle = \langle \hat{f},\hat{g}\rangle \quad et \quad \|f\|^2_{L^2} = \|\hat{f}\|^2_{L^2}$$

On définit également la transformée de Fourier pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

Ou pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$

2- <u>au sens des distributions</u>

On ne peut définir la transformée de Fourier d'une distribution quelconque T, par : $\mathscr{F}[T]=\left\langle T(x),e^{-j2\pi\upsilon x}\right\rangle$ car si suppT borné la transformée est $\mathcal{C}^\infty$ et donc trop restrictif
Comme pour la convolution, nous allons écrire la TF pour une distribution régulière (fonction localement sommable) et généraliser

Ainsi

$$\left\langle \mathscr{F}[f],\varphi \right\rangle = \int \hat{f}(\upsilon)\varphi(\upsilon)d\upsilon = \int \varphi(\upsilon)\int f(x)e^{-j2\pi\upsilon x}dxd\upsilon$$

$$= \int f(x)\int \varphi(\upsilon)e^{-j2\pi\upsilon x}d\upsilon dx = \int f(x)\hat{\varphi}(x)dx$$

$$\left\langle f,\mathscr{F}[\varphi]\right\rangle$$

La définition serait donc :

$$\left\langle \mathscr{F}[f],\varphi \right\rangle = \left\langle f,\mathscr{F}[\varphi]\right\rangle$$

Pour autant, si φ est support borné, $\mathscr{F}[\varphi]$ ne l'est jamais !
Cette définition ne convient pas encore. Il faut changer $\mathfrak{D}$ l'espace de définition des fonctions φ

<u>Espace $\mathscr{S}$</u>
<u>Définition</u> : espace des fonctions indéfiniment dérivables qui décroissent (ainsi que chacune de leurs dérivées), plus vite que toute puissance de $1/|x|$ quand $|x|\to\infty$

Ce qui signifie que $\forall l,m\geq 0,\quad |x|^l \varphi^{(m)}(x)$ borné et sommable (car : $|x|^l\ \varphi^{(m)}(x) \leq K|x|^{-2}$.)
Par ailleurs : une suite de fonctions φ_k de $\mathscr{S}$ converge vers 0 dans $\mathscr{S}$ si, quels que soient les entiers $l,m\geq 0$, la suite $x^l\varphi_k^{(m)}(x)$ converge vers 0 uniformément sur $\mathbb{R}$.
Soit :

$$\forall l,m\geq 0 \quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon,l,m), \quad \forall x \quad k\geq N \Rightarrow \left|x^l\varphi_k^{(m)}(x)\right|\leq\varepsilon$$

Rq : $\mathfrak{D}$ est un s.e.v. de $\mathscr{S}$
Transformée de Fourier d'une fonction $\varphi\in\mathscr{S}$
φ étant sommable,

$$\hat{\varphi}(\upsilon)=\int\varphi(x)e^{-j2\pi\upsilon x}dx$$

-Propriété 1 : $\hat{\varphi}(\upsilon)$ est indéfiniment dérivable

$$\hat{\varphi}^{(l)}(\upsilon)=\int(-j2\pi x)^l\varphi(x)e^{-j2\pi\upsilon x}dx$$

Cette expression a un sens puisque $x^l\varphi(x)$ est sommable
-Propriété 2 : $\upsilon^m\hat{\varphi}^{(l)}(\upsilon)$ est borné $\forall l,m\geq 0$

En effet :

Comme :

$$\mathscr{F}\left[\alpha^{(m)}(x)\right] = (j2\pi\upsilon)^m \hat{\alpha}(\upsilon)$$

soit:

$$(j2\pi\upsilon)^m \hat{\alpha}(\upsilon) = \int \alpha^{(m)}(x) e^{-j2\pi\upsilon x} dx \quad si \quad \alpha(x) = (-j2\pi x)^l \varphi(x)$$

alors:

$$(j2\pi\upsilon)^m \hat{\varphi}^{(l)}(\upsilon) = \int \frac{d^m}{dx^m}\left[(-j2\pi x)^l \varphi(x)\right] e^{-j2\pi\upsilon x} dx$$

$$\left|(j2\pi\upsilon)^m \hat{\varphi}^{(l)}(\upsilon)\right| \leq \int \left|\frac{d^m}{dx^m}\left[(-j2\pi x)^l \varphi(x)\right]\right| dx$$

Des 2 propriétés on en déduit que $\hat{\varphi}(\upsilon) \in \mathscr{S}(\upsilon)$

-Propriété 3 : Si $\varphi_k(x) \to 0$ dans $\mathscr{S}(x)$, $\hat{\varphi}_k(\upsilon) \to 0$ dans $\mathscr{S}(\upsilon)$

En effet, nous savons que $\forall l, m \geq 0 \quad \left|x^l \varphi_k^{(m)}(x)\right|$ converge vers 0,

Donc d'après la propriété 2 : $\upsilon^m \hat{\varphi}_k^{(l)}(\upsilon)$ convergera également vers 0

Théorèmes :

1- la transformée de Fourier est une application linéaire et continue de $\mathscr{S}(x)$ ans $\mathscr{S}(\upsilon)$
2- la transformée de Fourier établit une correspondance biunivoque entre les éléments de $\mathscr{S}(x)$ et ceux de $\mathscr{S}(\upsilon)$.

VI -Transformée de Fourier des distributions tempérées

Distributions tempérées

Définition.

On appelle distribution tempérée (ou lente) toute application linéaire et continue sur $\mathscr{S}$.

Exemple :toute fonction à croissance lente telle que

$\exists A, m > 0 \quad | \quad |f(x)| \leq A|x|^m$

$\mathscr{S}'$ est un s.e.v. de $\mathfrak{D}'$

Définit une distribution régulière tempérée car si $\varphi \in \mathscr{S}$ alors $\exists B \quad | \quad |\varphi(x)| \leq \frac{B}{\left|x^{m+2}\right|}$ et

ainsi $|f(x)\varphi(x)| \leq \frac{AB}{\left|x^2\right|}$ est sommable

Donnons à présent la définition de la transformée d'une distribution tempérée.

$$\langle \mathscr{F}[T],\varphi\rangle=\langle T,\mathscr{F}[\varphi]\rangle$$

Théorèmes : toute distribution tempérée a une transformée de Fourier qui est également une distribution tempérée. La transformée de Fourier est une application linéaire et continue de $\mathscr{S}'(x)$ dans $\mathscr{S}'(\upsilon)$

La transformée de Fourier établit une correspondance biunivoque entre les éléments de $\mathscr{S}'(x)$ et ceux de $\mathscr{S}'(\upsilon)$.

Cas particulier des distributions à support borné.

$$\langle \mathscr{F}[T],\varphi\rangle = \langle T,\mathscr{F}[\varphi]\rangle = \left\langle T(x),\int \varphi(\upsilon)e^{-j2\pi\upsilon x}d\upsilon\right\rangle$$

$$=\left\langle T(x),\left\langle \varphi(\upsilon),e^{-j2\pi\upsilon x}\right\rangle\right\rangle=\left\langle T(x).\varphi(\upsilon),e^{-j2\pi\upsilon x}\right\rangle$$

$$=\left\langle \varphi(\upsilon),\left\langle T(x),e^{-j2\pi\upsilon x}\right\rangle\right\rangle=\int \varphi(\upsilon)\left\langle T(x),e^{-j2\pi\upsilon x}\right\rangle d\upsilon$$

$$= \int \varphi(\upsilon).\mathscr{F}[T]d\upsilon = \langle \mathscr{F}[T],\varphi\rangle$$

Théorème : la transformée d'une distribution à support borné est une fonction prolongeable pour les valeurs complexes de υ en une fonction holomorphe entière donnée par : $\mathscr{F}[T]=\left\langle T(x),e^{-j2\pi\upsilon x}\right\rangle$

Propriétés des transformées des distributions

1- changement d'échelle

$$\langle \mathscr{F}[T],\varphi\rangle = \langle T,\mathscr{F}[\varphi]\rangle$$

$$\forall a,\quad \langle \mathscr{F}[T(ax)],\varphi(\upsilon)\rangle=\langle T(ax),\mathscr{F}[\varphi]\rangle=\left\langle T(x),\frac{1}{|a|}\hat{\varphi}(\frac{x}{a})\right\rangle$$

$$= \langle T(x),\mathscr{F}[\varphi(a\upsilon)]\rangle = \langle \hat{T}(x),\varphi(ax)\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle \hat{T}(\frac{x}{a}),\varphi(x)\right\rangle$$

$$ainsi\quad \mathscr{F}\left[T(ax)\right] = \frac{1}{|a|}\hat{T}(\frac{\nu}{a})$$

2- translation

$$\langle \mathscr{F}[T(x-a)],\varphi(\upsilon)\rangle = \langle T(x-a),\hat{\varphi}(x)\rangle = \langle T(x),\hat{\varphi}(x+a)\rangle$$

$$=\left\langle T(\upsilon),\mathscr{F}\left[e^{-j2\pi xa}\varphi(x)\right]\right\rangle=\left\langle \mathscr{F}[T(\upsilon)],e^{-j2\pi ax}\varphi(x)\right\rangle$$

$$= \left\langle e^{-j2\pi a\upsilon}\mathscr{F}[T(x)],\varphi(\upsilon)\right\rangle$$

Ainsi

$$\mathscr{F}\left[T(x-a)\right]=e^{-j2\pi a\upsilon}\mathscr{F}\left[T(x)\right]$$

3- dérivation

$$\left\langle \mathscr{F}\left[T^{(n)}(x)\right],\varphi(\upsilon)\right\rangle = \left\langle T^{(n)}(x),\hat{\varphi}(x)\right\rangle$$

$$=(-1)^n\left\langle T(x),\frac{d^n}{dx^n}\hat{\varphi}(x)\right\rangle=(-1)^n\left\langle T(\upsilon),\mathscr{F}\left[(-j2\pi x)^n\varphi(x)\right]\right\rangle$$

$$= \left\langle \mathscr{F}\left[T(\upsilon)\right],(j2\pi x)^n\varphi(x)\right\rangle = \left\langle (j2\pi\upsilon)^n\mathscr{F}\left[T(x)\right],\varphi(\upsilon)\right\rangle$$

Ainsi

$$\mathscr{F}\left[T^{(n)}(x)\right]=(j2\pi\upsilon)^n\mathscr{F}\left[T(x)\right]$$

Exemples de transformées de Fourier des distributions

1- $\mathscr{F}[1]=?$

$\left\langle \mathscr{F}[T],\varphi\right\rangle = \left\langle T,\mathscr{F}[\varphi]\right\rangle$

$\left\langle \mathscr{F}[1],\varphi\right\rangle = \left\langle 1,\mathscr{F}[\varphi]\right\rangle = \int \hat{\varphi}(\upsilon)d\upsilon=\varphi(0)$

Ainsi :

$$\mathscr{F}[1]=\delta$$

2-

$$\mathscr{F}[\delta]=1 \text{évident}$$

$3 - \mathscr{F}\left[e^{-j2\pi\upsilon_0 x}\right] = \delta(\upsilon + \upsilon_0)$

$\mathscr{F}\left[\cos 2\pi\upsilon_0 x\right]=\frac{1}{2}\left[\delta(\upsilon-\upsilon_0)+\delta(\upsilon+\upsilon_0)\right]$

$\mathscr{F}\left[\sin 2\pi\upsilon_0 x\right] = \frac{1}{2j}\left[\delta(\upsilon-\upsilon_0)-\delta(\upsilon+\upsilon_0)\right]$

4-

$\mathscr{F}\left[\delta^{(m)}\right] = (j2\pi\upsilon)^m \quad \forall m \geq 0$

$\mathscr{F}\left[\delta(x-a)\right] = e^{-j2\pi\upsilon a}$

Par ailleurs :

Toute fonction $\in L^1(\mathbb{R})\ ou\ L^2(\mathbb{R})$ définit une distribution $\in \mathscr{S}'(x)$ et

Tout signal numérique $T=\sum_{\mathbb{Z}} f_n\delta(t-n)$ tel que $\sum_{\mathbb{Z}} |f_n| \langle \infty$ définit une distribution tempérée. De même si $\sum_{\mathbb{Z}} |f_n|^2 \langle \infty$.

<u>Transformée de Fourier et convolution des distributions</u>

Nous avons vu que le produit de convolution n'avait pas toujours un sens.
Mais si, par exemple, l'une des 2 distributions tempérées est à support borné, alors ce produit a un sens et nous admettrons, sans le démontrer que :

$$\mathscr{F}[S*T]=\mathscr{F}[S].\mathscr{F}[T]$$

Si l'une des 2 distributions est à support borné, alors sa Transformée de Fourier est indéfiniment dérivable, donc le produit direct du membre de droite a un sens.
Nous pouvons également écrire, l' égalité suivante chaque fois que les 2 membres auront un sens.

$$\mathscr{F}[S.T]=\mathscr{F}[S]*\mathscr{F}[T]$$

Remarque : les égalités du même genre sont vraies pour les transformées inverses.

Transformées de Fourier à plusieurs variables.

Soit les vecteurs

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$\upsilon=(\upsilon_1,\upsilon_2,\ldots,\upsilon_n)^T \in \mathbb{R}^n$

La transformée de Fourier de la fonction $f(x)$ s'écrit :

$$\hat{f}(\upsilon)=\iint\ldots\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-j2\pi\upsilon^T x}dx$$

Si $f(x)\in\mathscr{S}_x^n$ alors $\hat{f}(\upsilon)\in\mathscr{S}_\upsilon^n$

Propriétés (que nous écrirons pour n=2)

$f(x,y)\rightarrow\hat{f}(u,v)$

$f(x-x_0,y-y_0)\rightarrow\hat{f}(u,v).e^{-j2\pi(ux_0+vy_0)}$

$f(ax,by)\rightarrow\frac{1}{|ab|}\hat{f}(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$

$\delta(x,y) \to 1$

$\frac{\partial}{\partial x}\delta(x,y) \to (j2\pi u)$

$\frac{\partial}{\partial y}\delta(x,y) \to (j2\pi v)$

$1 \to \delta(u,v)$

$-2j\pi x \to \frac{\partial}{\partial u}\delta(u,v)$

$-2j\pi y \to \frac{\partial}{\partial v}\delta(u,v)$

De la même manière la convolution à deux dimensions s'écrit :

$f(x,y)*g(x,y) \to \hat{f}(u,v).\hat{g}(u,v)$

Le théorème de Parseval s'écrit :

$$\iint f(x,y)\bar{g}(x,y)dxdy = \iint \hat{f}(u,v).\bar{\hat{g}}(u,v)dudv$$

VII - Séries de Fourier

a)- Distributions sur le cercle

soit Γ un cercle de circonférence T et un point d'abscisse curviligne courant s.

Ainsi nous pouvons établir une correspondance biunivoque entre une fonction périodique $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ de période T avec une fonction $f(s)$ sur le cercle Γ.

Ainsi, à toute fonction Loc $f(s)$ sur le cercle Γ correspond une distribution régulière définie par :

$$\langle f(s),\varphi(s)\rangle = \int_{\Gamma} f(s)\varphi(s)ds$$

On démontre qu'à toute distribution périodique $\mathscr{T}$ de période T de la variable $x \in \mathbb{R}$, correspond d'une manière biunivoque une distribution $\mathscr{T}$ de la variable s sur Γ.

Il est judicieux de raisonner sur le cercle car c'est un ensemble de mesures finies. Ainsi toute distribution est à support borné !

Théorème : toute distribution de $\mathfrak{D}'(\Gamma)$ est développable en série de Fourier. Le développement converge toujours dans $\mathfrak{D}'(\Gamma)$.

Soit $\mathscr{T}$ une distribution périodique :

$$\mathscr{T}(s) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n\frac{s}{T}} \qquad \text{avec} \qquad c_n = \frac{1}{T}\left\langle \mathscr{T}(t), e^{-j2\pi n\frac{t}{T}} \right\rangle$$

Soit le peigne de Dirac :

$Ш(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(x-nT)$, périodique de période T peut donc s'écrire :

$Ш(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{j2\pi n\frac{x}{T}}$ avec $c_n=\frac{1}{T}\left\langle \mathscr{T}(t),e^{-j2\pi n\frac{t}{T}}\right\rangle$

Ainsi : $c_n=\frac{1}{T}\left\langle \delta(x),e^{-j2\pi nx/T}\right\rangle=\frac{1}{T}$

Et :

$$Ш(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(x-nT)=\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}e^{j2\pi nx/T}$$

Par ailleurs ;

$$\mathscr{F}\,Ш(x)=\mathscr{F}\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(x-nT)=\mathscr{F}\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}e^{j2\pi nx/T}=\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\upsilon-\frac{n}{T}\right)$$

Donc :

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(x-nT)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\upsilon-\frac{n}{T}\right)$$

Formule sommatoire de Poisson

Soit f(x) une fonction quelconque : construisons

$f(x)*\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(x-nT)=\sum_{-\infty}^{\infty}f(x-nT)$ qui est une fonction périodique

Prenons la Transformée de Fourier du membre de gauche, nous obtenons :

$$\frac{1}{T}\hat{f}(\upsilon)\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\upsilon-\frac{n}{T})=\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\frac{n}{T})\delta(\upsilon-\frac{n}{T})$$

Sa Transformée inverse s'écrit :

$$\bar{\mathscr{F}}[\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\frac{n}{T})\delta(\upsilon-\frac{n}{T})]=\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\frac{n}{T})\bar{\mathscr{F}}[\delta(\upsilon-\frac{n}{T})]$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\frac{n}{T})e^{j2\pi xn/T}$$

Ainsi :

$$\sum_{-\infty}^{\infty}f(x-nT)=\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\frac{n}{T})e^{j2\pi xn/T}$$

En faisant x=0

$$\sum_{-\infty}^{\infty}f(nT)=\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\frac{n}{T})$$

Exercices :

A- Déterminer les limites lorsque h tend vers 0 par valeurs positives des distributions :

$$\frac{\delta(t+h)-\delta(t-h)}{h} \quad et \quad \frac{\delta(t+h)-2\delta(t)+\delta(t-h)}{h^2}$$

B- Les applications suivantes de D dans $\mathbb{R}$ sont elles des distributions

$$a) \quad T(\varphi)=\int_0^1 \varphi(t)dt \qquad b) \quad T(\varphi)=\int_0^1 |\varphi(t)|\,dt$$

$$c) \quad T(\varphi)=\sum_{n=0}^{N} \varphi^{(n)}(0) \quad d) \quad T(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(0)$$

$$e) \quad T(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$$

Autres exercices :

1- Donner l'expression de $|x|'=?$
2- Donner le résultat de $T(x-a)*T(x+b)$
3- si $H(x,y)$ est Heaviside dans $\mathbb{R}^2$ calculer $\dfrac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x \partial y}$
4- Donner $\mathscr{F}(t^n)=$?
5- Sachant que $\mathscr{F}\,\mathrm{sgn}(t)=\dfrac{1}{j\pi}VP(\dfrac{1}{\upsilon})$, calculer $\mathscr{F}\,H(t)$

Exemple de contrôle écrit (1h00 sans documents)

1) En appelant $H(t)$ la fonction d'Heaviside (ou distribution) et soit :

$$f(t)=H(t)\sin t$$

et $$g(t)=H(t)\cos t$$

Calculer $f'(t)$ et $g'(t)$ au sens des distributions.

2) Calculer la transformée de Fourier de la distribution tempérée :

$$s(t)=t$$

3) Soit une distribution T vérifiant l'équation :

$$(t-1).T(t)=0$$

a) Déterminer une équation différentielle du 1^{er} ordre vérifiée par $\hat{T}(\nu)=\mathscr{T}\left[T(t)\right]$
b) En déduire $\hat{T}(\nu)$
c) En déduire $T(t)$

Bibliographie

1-L.Schwartz : Méthodes mathématiques pour les sciences physiques (MMP)
Ed. Hermann, Paris 1965
2-F.Roddier : Distributions et transformation de Fourier. Ed Mac Graw-hill 19..