Cours I3
Théorie du Signal

Probabilités et processus (éléments)

Sommaire

Préliminaire

Il est difficile de donner une définition rigoureuse des probabilités car celles-ci se rattachent à l'expérience et par conséquent, l'empirisme entre en jeu. Toutefois, il nous faut donner un cadre d'études à cette théorie.

I-Définitions

Expérience : tout ensemble Ω de résultats ξ possibles.
Evènement : Si $\mathcal{A}$ est une tribu de Ω, un événement est tout élément de $\mathcal{A}$.
Un événement est donc un sous-ensemble de résultats ξ appartenants à Ω
Probabilité : une probabilité est toute mesure positive sur la tribu $\mathcal{A}$ | P(Ω)=1.
Soit un événement E, $\forall E \in \mathcal{A}$, $P(E)$ est un réel positif appelé probabilité de cet événement.

Rappel :

Une tribu :

Soit $\mathcal{A}$ une famille de parties $\mathcal{P}$ de Ω. $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole ou tribu si :

$\mathcal{A} \neq \{0\}$

$\exists \mathcal{P} \in \mathcal{A}$

$\forall \mathcal{P} \in \mathcal{A} \quad C_{\Omega}\mathcal{P} \in \mathcal{A}$

$\forall \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j \in \mathcal{A} \quad \mathcal{P}_i \cup \mathcal{P}_j \in \mathcal{A}$

Mesure sur une tribu :

Si Ω l'ensemble précédent muni d'une tribu de parties $\mathcal{P}$. la mesure µ sur $\mathcal{A}$ est une application | à chaque partie $\mathcal{P} \in \mathcal{A}$ lui correspond un scalaire µ($\mathcal{P}$) .

Exemple :

Lors d'un jeu de dé : $\Omega = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6)$

Tout résultat $\xi \in \Omega$ est un événement , le sous ensemble (ξ_1, ξ_3, ξ_5) est un également un événement. (tirage impair)

$P(\xi_i)$ est la probabilité de l'événement « la face du dé est « i ».

Nous pouvons également affirmer que :

$P(E) = \sum_{\xi_i \in E} P(\xi_i)$ si le dé n'est pas pipé, P(E : impair) =1/2

Variables aléatoires :

$$\xi \in \Omega \xrightarrow{X} X(\xi) \in \mathbb{R}$$

A toute mesure P positive, sur la tribu $\mathcal{A}$ des événements de Ω | P(Ω)=1 correspond une mesure positive sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ | P($\mathbb{R}$)=1 et nous avons :

$$P\{X(\xi) \in B\} = P\{X^{-1}(B)\}$$

On doit également avoir :

$$P\{X = \infty\} = P\{X = -\infty\} = 0$$

Et $$F(x) = P\{X \in]-\infty, x]\} = P\{X \leq x\}$$

que l'on appelle « fonction de répartition » de la variable aléatoire X.

Le résultat d'une expérience est noté « x »

Conditions sur F

$$F(-\infty) = 0 \qquad F(\infty) = 1$$

$$\forall x_2 \rangle x_1 \quad F(x_2) \geq F(x_1)$$

$$F \text{ est semi} - \text{continue à droite}$$

Nous appellerons à présent, F_X , la fonction de répartition de la variable aléatoire X

Densité de probabilité :

Si F est continue et dérivable, on appelle f_X la densité de probabilité de la variable aléatoire X ;

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

F_X étant monotone, non décroissante et

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

De même nous avons :

$$P\left\{X \in \left]x, x+dx\right]\right\} = f_X\left(x\right)dx$$

Et

$$\langle f_X(x), 1\rangle = 1$$

Par ailleurs :

$$\text{Si} \quad \prod_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

Alors :

$$\langle f_X(x), \prod_A(x)\rangle = P\left\{X \in A\right\}$$

Espérance mathématique

Définie comme suit :

$$E(X) = m = \int_A x.f_X(x)dx = \langle f_X(x), x\rangle$$

Nommée également moyenne statistique.

D'une manière générale, on appelle le moment d'ordre p

$$E(X^p) = m_p = \int_A x^p f_X(x)dx = \langle f_X(x), x^p\rangle$$

En particulier si p=2, on appelle σ_X^2 la variance et σ_X , l'écart type

$$\sigma_X^2 = E\left[\left(X - m_1\right)^2\right] = \langle f_X(x), \left(x - m_1\right)^2\rangle$$

Concernant les différents types de convergence ; on peut remarquer que

La CV dans L^2 entraîne la convergence en probabilité. Le lecteur le démontrera.

Remarque : si les variables sont discrètes, nous aurons :

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{N} P\left\{X = x_i\right\} u\left(x - x_i\right)$$

Où u est la distribution d'Heaviside :

Alors :

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{N} P\left\{X = x_i\right\} \delta(x - x_i)$$

Et :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{N} x_i P\{X=x_i\}$$

On peut également écrire l'espérance d'une fonction de la variable aléatoire X. Soit g une fonction de la variable X, alors :

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$$

Qui donne dans le cas discret :

$$E[g(X)]=\sum_{i=1}^{N} g(x_i)P\{X=x_i\}$$

Inégalité de Bienaimé-Chebychev

$$soit \quad m=E(X) \quad alors$$

$$P\{|X-m|\geq \varepsilon\}\leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$$

Le lecteur le démontrera à titre d'exercice.

II-Probabilités conditionnelles

Si la réalisation d'un événement est conditionné par un autre, alors on définit la probabilité conditionnelle par :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Alors la fonction de répartition conditionnelle se définit comme :

$$F_{X|B}(x|B)=P(X\leq x|B)=\frac{P\{X\leq x\cap B\}}{P(B)}$$

Et la densité de probabilité conditionnelle par :

$$f_{X|B}(x|B)=\frac{dF_X(x|B)}{dx}$$

Propriétés

$$f_{X|B}(x|B)\geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|B}(x|B)dx=1$$

$$F_{X|B}(x|B)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|B}(u|B)du$$

$$P\{x_1\langle X\leq x_2|B\}=\int_{x_1}^{x_2} f_{X|B}(u|B)du$$

III-Fonction caractéristique

Définition :
C'est la Transformée de Fourier de la densité de probabilité. Comme la densité est sommable et pouvant être constituée de distributions de Dirac, sa Transformée de Fourier existe et est donnée par :

$$\varphi_X(\upsilon) = \hat{f}_X(\upsilon) = \langle f_X(x), e^{-2j\pi\upsilon x}\rangle = E\left\{e^{-2j\pi\upsilon x}\right\}$$

Son intérêt réside, entre autre dans le calcul des moments.
En effet :

$$\frac{d^p}{d\upsilon^p}\varphi_X(\upsilon)|_{\upsilon=0} = \langle(-j2\pi x)^p . f_X(x), e^{-2j\pi\upsilon x}\rangle|_{\upsilon=0} = \langle(-j2\pi x)^p . f_X(x)\rangle = (-j2\pi)^p m_p$$

soit

$$m_p = \frac{\varphi_X^{(p)}(0)}{(-j2\pi)^p}$$

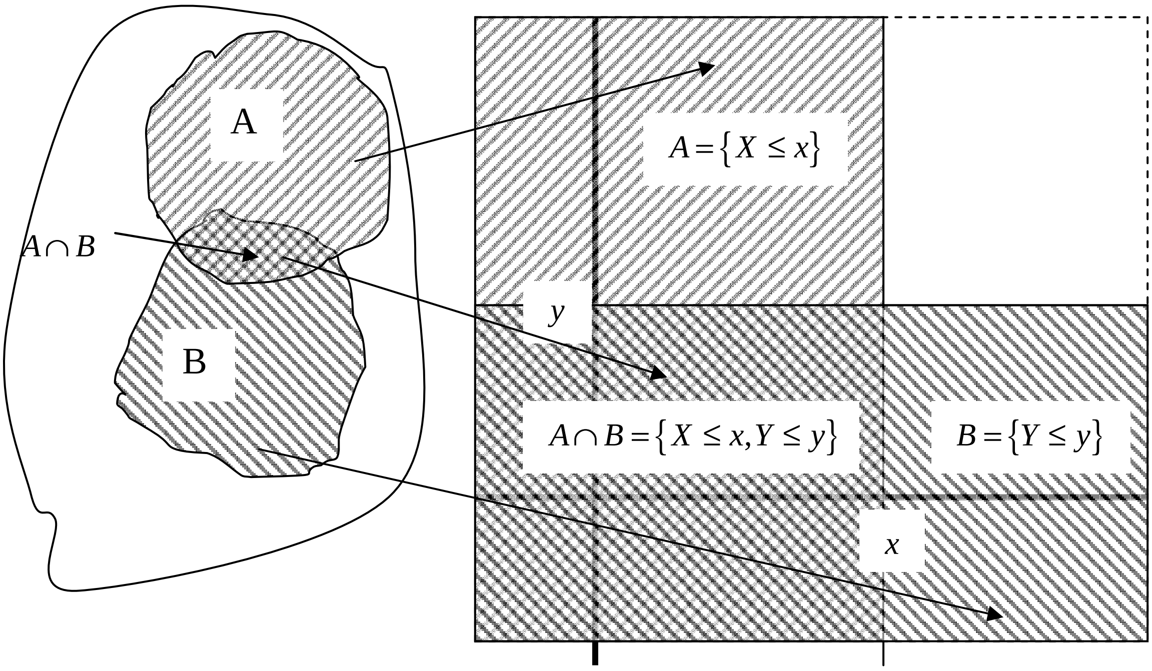
Exemple :
Loi gaussienne :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_X(\upsilon) = e^{-2\pi^2\sigma^2\upsilon^2}$$

Loi exponentielle : (l'intervalles de temps entre 2 évènements successifs a pour densité ...)

$$f_X(x) = \alpha u(x) e^{-\alpha x} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_X(\upsilon) = \frac{\alpha}{\alpha + 2j\pi\upsilon}$$

IV-Cas de plusieurs variables



Ainsi nous pouvons définir les fonctions de répartitions suivantes :

$$F_X(x) = P\{X \le x\} \qquad et \qquad F_Y(y) = P\{Y \le y\}$$

Et faire apparaître la notion d'événements joints $\{X \le x, Y \le y\}$

Avec la fonction de répartition de 2 évènements :

$$F_{X,Y}(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = P(A \cap B)$$

Dans le cas discret, avec 2 variables aléatoires, nous pouvons écrire :

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} P(X = x_n, Y = y_m)u(x - x_n)u(y - y_m)$$

Dans le cas de N variables aléatoires, il vient :

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_N}(x_1,x_2,\ldots,x_N) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2,\ldots,X_N \le x_N\}$$

Propriétés de cette fonction de répartition :

$F_{X,Y}(-\infty,\infty) = 0 \qquad F_{X,Y}(-\infty,y) = 0 \qquad F_{X,Y}(x,-\infty) = 0$

$F_{X,Y}(\infty,\infty) = 1$

$0 \le F_{X,Y}(x,y) \le 1$

$F_{X,Y}(x,y) \nearrow$ *en x et y*

$F_{X,Y}(x_2,y_2) + F_{X,Y}(x_1,y_1) - F_{X,Y}(x_1,y_2) - F_{X,Y}(x_2,y_1) = P\{x_1 \langle X \le x_2, y_1 \langle Y \le y_2\}$

$F_{X,Y}(x,\infty) = F_X(x) \qquad F_{X,Y}(\infty,y) = F_Y(y)$

V-Densité de probabilité conjointe

On définit la densité de probabilité conjointe comme :

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\partial y}$$

Dans le cas de variables aléatoires discrètes :

$$f_{X,Y}(x,y)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}P(X=x_n,Y=y_m)\delta(x-x_n)\delta(y-y_m)$$

Dans le cas de N variables aléatoires, il vient :

$$f_{X_1,X_2,\dots,X_N}(x_1,x_2,\dots,x_N)=\frac{\partial^N F_{X_1,X_2,\dots,X_N}(x_1,x_2,\dots,x_N)}{\partial x_1\partial x_2,\dots,\partial x_N}$$

Ou :

$$F_{X_1,X_2,\dots,X_N}(x_1,x_2,\dots,x_N)=\int_{-\infty}^{x_N}\dots\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_1}f_{X_1,X_2,\dots,X_N}(u_1,u_2,\dots,u_N)du_1du_2\dots du_N$$

Propriétés de cette densité de probabilité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y)\geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dxdy=1$$

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f_{X,Y}(u,v)dudv$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dx$$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(u,v)dudv \qquad F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(u,v)dudv$$

$$P\{x_1\langle X\leq x_2,y_1\langle Y\leq y_2\}=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

VI-Densité de probabilité conditionnelle

Reprenons les résultats précédents quand $B=\{y-\Delta y\langle Y\geq y+\Delta y\}$

$$F_{X|B}(x|B)=P(X\leq x|B)=\frac{P\{X\leq x\cap B\}}{P(B)} \quad \text{soit}$$

$$F_{X|B}(x|y\in B)=P(X\leq x|y\in B)=\frac{P\{X\leq x,Y\in B\}}{P(B)}=\frac{\int_{y\in B}\int_{-\infty}^{x}f_{X,Y}(u,v)dudv}{\int_{y\in B}f_Y(v)dv}=\frac{\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y}\int_{-\infty}^{x}f_{X,Y}(u,v)dudv}{\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y}f_Y(v)dv}$$

Dans le cas de variables discrètes, on écrit :

$$F_{X|Y}(x \mid Y=y_k)=\sum_{i=1}^{N}\frac{P\{X=x_i,Y=y_k\}}{P\{Y=y_k\}}u(x-x_i) \qquad and$$
$$f_{X|Y}(x \mid Y=y_k)=\sum_{i=1}^{N}\frac{P\{X=x_i,Y=y_k\}}{P\{Y=y_k\}}\delta(x-x_i)$$

Reprenons l'écriture de la fonction de répartition conditionnelle précédente dans le cas continu en faisant tendre $\Delta y \to 0$

$$F_{X|Y}(x \mid y-\Delta y\langle Y\le y+\Delta y)\simeq\frac{\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,y)du2\Delta y}{f_Y(y)2\Delta y}$$
$$si \quad \Delta y\to 0,$$
$$F_{X|Y}(x \mid Y=y)=\frac{\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,y)du}{f_Y(y)}$$

En dérivant par rapport à x, il vient :

$f_{X|Y}(x \mid Y=y)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ qu'on écrit aussi quand il n'y a pas d'ambiguïté

$$f_{X|Y}(x \mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \qquad et \qquad f_{Y|X}(y \mid x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

De la même manière

$$si\ à\ présent: \quad B=(y_1\langle Y\le y_2) \quad alors:$$
$$F_{X|Y}(x \mid y_1\langle Y\le y_2)=\frac{F_{X,Y}(x,y_2)-F_{X,Y}(x,y_1)}{F_Y(y_2)-F_Y(y_1)}=\frac{\int_{y_1}^{y_2}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,y)dudy}{\int_{y_1}^{y_2}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy}$$
$$f_{X|Y}(x \mid y_1\langle Y\le y_2)=\frac{\int_{y_1}^{y_2} f_{X,Y}(x,y)dy}{\int_{y_1}^{y_2}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy}$$

Espérance conditionnelle :

On définit l'espérance conditionnelle $E(X \mid Y)$ de la manière suivante :

$$E(X \mid Y)=\int_{x\in B} xf_{X|Y}(x \mid y)dx \quad and\ E(Y \mid X)=\int_{y\in A} yf_{Y|X}(y \mid x)dy$$
$$and: \quad E\big(E(X \mid Y)\big)=E(X)$$

VII-Indépendance statistique

2 évènements sont statistiquement indépendants si :
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$
Si les événements A et B sont :

$$A = \{X \leq x\} \qquad B = \{Y \leq y\}$$

Alors il vient :

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\} P\{Y \leq y\}$$

Et :

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y) \quad et$$
$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Nous avions écrit :

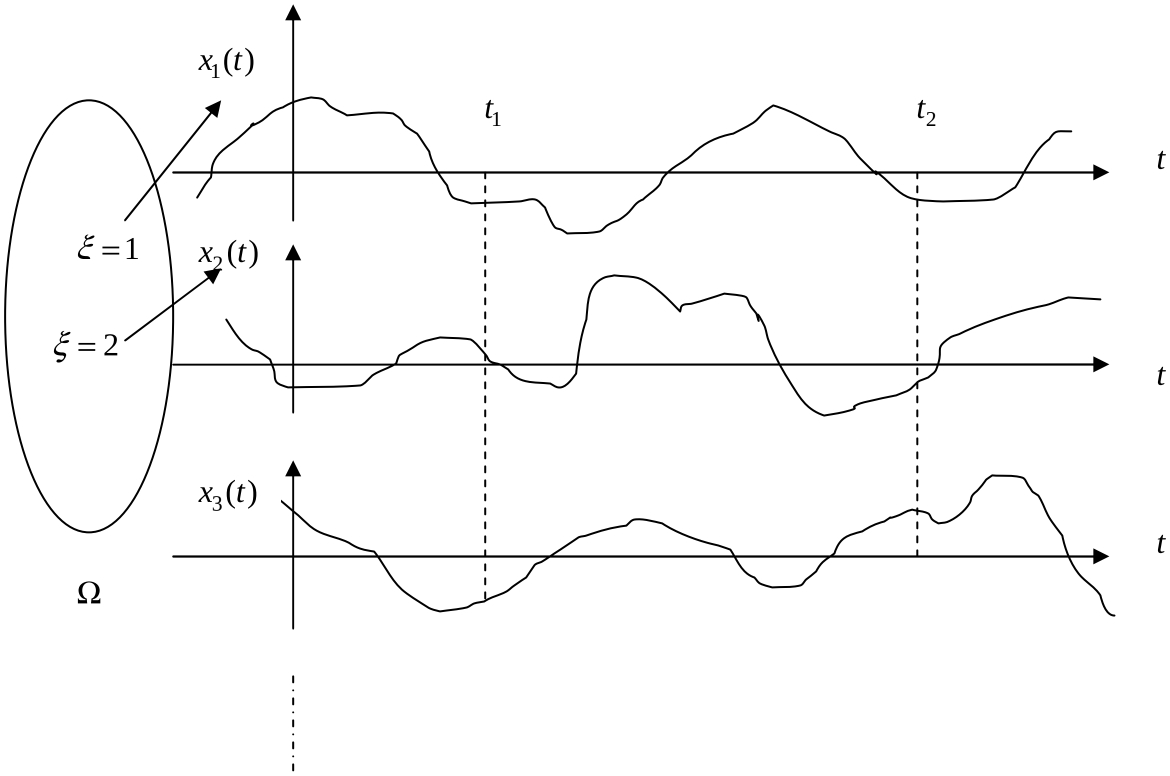
$$F_{X|Y}(x \mid Y \leq y) = P\{X \leq x \mid Y \leq y\} = \frac{P\{X \leq x, Y \leq y\}}{P\{Y \leq y\}} = \frac{F_{XY}(x,y)}{F_Y(y)}$$

Soit dans le cas de l'indépendance :

$$F_{X|Y}(x \mid Y \leq y) = F_X(x) \quad et \quad F_{Y|X}(y \mid X \leq x) = F_Y(y)$$
$$f_{X|Y}(x \mid Y \leq y) = f_X(x) \quad comme \quad f_{Y|X}(y \mid X \leq x) = f_Y(y)$$

VIII-Processus stochastiques

En analyse de signaux, l'observation est souvent dépendante du résultat d'une expérience ou d'un événement mais aussi du temps.
En conséquence, nous noterons $X(t,\xi)$ un tel processus stochastique.
Par exemple :



Lecture du schéma
$x_1(t)$ représente une trajectoire. C'est le résultat d'une expérience du processus $X(t,\xi)$ quand $\xi = 1$ soit : $X(t,\xi = 1)$
Quant le temps est fixé à t_1 par exemple, $x_1(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1)$ représentent 3 variables aléatoires discrètes.
Nous pouvons également parler de vecteur aléatoire composé des différentes variables $x_1(t_1)\,x_1(t_2)\ldots x_1(t_N)$ que nous verrons en I4.
Il est clair qu'à ce stade, nous pouvons considérer ces observations comme continues ou discrètes.

1-Fonction de répartition et densité

Ainsi : $F_X(x_1;t_1) = P\{X(t_1) \le x_1\}$
Dans le cas de 2 variables nous noterons :

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2\}$$

Et bien entendu dans le cas de N variables

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_N; t_1, t_2, \ldots, t_N) = P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \ldots, X(t_N) \le x_N\}$$

Nous pouvons ainsi définir une densité de probabilité jointe :

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad et$$

$$f_X(x_1,x_2,\ldots,x_N;t_1,t_2,\ldots,t_N)=\frac{\partial^N F_X(x_1,x_2,\ldots,x_N;t_1,t_2,\ldots,t_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_N}$$

L'Indépendance statistique se déduit de ce que nous avons vu précédemment :

Les 2 processus X et Y sont statistiquement indépendants si :

$$f_{X,Y}(x_1,x_2,\ldots,x_N,y_1,y_2,\ldots,y_M;t_1,t_2,\ldots,t_N,t_1',t_2',\ldots,t_M')$$
$$= f_X(x_1,x_2,\ldots,x_N;t_1,t_2,\ldots,t_N)\, f_Y(y_1,y_2,\ldots,y_M;t_1',t_2',\ldots,t_M')$$

<u>2-Stationnarité</u>

<u>Du 1er ordre :</u>

Un processus est dit stationnaire du 1er ordre si : $\forall t \quad et \quad \Delta$

$$f_X(x;t)=f_X(x;t+\Delta)$$

Ainsi l'espérance de la variable $X(t)$ s'écrit :

$$E\left[X(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x;t)dx$$

Celle de $X(t+\Delta)$ s'écrit :

$$E\left[X(t+\Delta)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x;t+\Delta)dx=\ldots E\left[X(t)\right] \quad par\ hypothèse$$

Résultat qui ne peut être que constant car t et Δ sont arbitraires

<u>Du 2ième ordre</u>

Un processus est dit stationnaire du 2 ième ordre si $\forall t_1,t_2 \quad et \quad \Delta$

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_X(x_1,x_2;t_1+\Delta,t_2+\Delta)$$

En conséquence :

$$R_{XX}(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)X(t_2)\right] \quad \text{fonction de} \quad \forall t_1, \quad et \quad t_2$$

Devient uniquement une fonction de $\tau=t_1-t_2$ si le processus est stationnaire du 2 ième ordre et :

$$R_{XX}(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)X(t_2)\right]=\int\int x_1x_2 f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2=\int\int x_1x_2 f_X(x_1,x_2;t_1+\Delta,t_2+\Delta)dx_1dx_2$$

$si\ \Delta=-t_1$

$$=\int\int x_1x_2 f_X(x_1,x_2;t_2-t_1)dx_1dx_2=R_{XX}(\tau=t_2-t_1)$$

Exemple :

Soit X(t) un processus stationnaire du 2ième ordre de fonction d'autocorrelation

$R_{XX}(\tau)=\exp-a|\tau| \quad a\in\mathbb{R}^{*,+}$. On construit le processus Y(t) en modulant X(t) en amplitude soit

$$Y(t)=X(t)\cos\left(\omega_0 t+\phi\right) \quad ou\ \omega_0 = cons\tan te$$
$$et \quad \phi \quad uniformément\ distribué\ sur \quad [-\pi,\pi]$$
$$indépendant\ de\ X(t)$$

Quelle est l'autocorrélation de Y(t) ?

Stationnarité d'ordre N et au sens strict

Un processus est stationnaire d'ordre N et donc au sens strict si :

$$f_X(x_1,x_2,\ldots,x_N;t_1,t_2,\ldots,t_N)=f_X(x_1,x_2,\ldots,x_N;t_1+\Delta,t_2+\Delta,\ldots,t_N+\Delta)$$

3-Théorème de Wiener-Khinchine

Soit $X(t,\xi)$ un processus stochastique stationnaire du second ordre de fonction d'autocorrélation $\Gamma_X(\tau)$. La densité spectrale de puissance $\hat{\Gamma}_X(\nu)$ du processus X est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation.

$$\boxed{\hat{\Gamma}_X(\nu)=\lim_{T\to\infty}\left[E\left\{\frac{\left|\hat{X}_T(\nu,\xi)\right|^2}{2T}\right\}\right]=\mathscr{F}\left[\Gamma_X(\tau)\right]}$$

With :

$$X_T(t,\xi)=X(t,\xi)\mathbb{1}_{[-T,T]}(t)=\begin{cases}X(t,\xi) & si \quad |t|\le T\\ 0 & \sin on\end{cases}$$

$$\text{Et} \qquad \hat{X}_T(\nu,\xi)=\mathscr{F}\left[X_T(t,\xi)\right]$$

Démontrons ce résultat essentiel :

Calculons $E\left|\hat{X}_T(\nu,\xi)\right|^2$

$$E\left|\hat{X}_T(\nu,\xi)\right|^2=E\left(\hat{X}_T(\nu,\xi)\,\bar{\hat{X}}_T(\nu,\xi)\right)=E\left(\int_{-T}^{T}X_T(t,\xi)e^{-j2\pi\nu t}dt\int_{-T}^{T}\bar{X}_T(s,\xi)e^{j2\pi\nu s}ds\right)$$

$$et \quad \frac{E\left|\hat{X}_T(\nu,\xi)\right|^2}{2T}=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E\left[X_T(t,\xi)\bar{X}_T(s,\xi)\right]e^{-j2\pi\nu(t-s)}dtds$$

$$ainsi\ en\ posant \quad t=t \quad et \quad \tau=t-s \quad il\ vient:$$

$$\frac{E\left|\hat{X}_T(\nu,\xi)\right|^2}{2T}=\int_{t-T}^{t+T}\Gamma_X(\tau)\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\right]e^{-j2\pi\nu\tau}d\tau=\int_{t-T}^{t+T}\Gamma_X(\tau)e^{-j2\pi\nu\tau}d\tau$$

Remarque : le domaine d'intégration devient un parallélogramme.

En conséquence :

$$\hat{\Gamma}_X(\nu) = \lim_{T\to\infty}\left[E\left\{\frac{\left|\hat{X}_T\left(\nu,\xi\right)\right|^2}{2T}\right\}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_X(\tau)e^{-j2\pi\nu\tau}d\tau$$

Et nous pouvons écrire la puissance moyenne en écrivant :

$$P = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{\Gamma}_X\left(\nu\right)d\nu$$

4-Ergodisme

Ergodisme du 1^er ordre ou en moyenne

Un processus est dit ergodique en moyenne si sa moyenne statistique est égale à sa moyenne temporelle pour toute trajectoire presque surement :

$$E\left[X(t)\right] = \langle x\rangle$$

Avec :

$$\langle x\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt$$

Remarque : on peut se poser la question suivante :

Quel serait le résultat si nous prenions la moyenne temporelle non pas d'une trajectoire quelconque x mais du processus lui même X soit ?

$$\langle X\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$$

Réponse :
On peut montrer que :

$$E\langle X\rangle = EX(t)$$

Et que (si le processus est stationnaire du 2 ième ordre):

$$\operatorname{var}\langle X\rangle = \sigma_{\langle X\rangle}^2 = E\left[\langle X\rangle - E\langle X\rangle\right]^2 = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\right)^2\int_{t=-T}^{T}\int_{\tau=-T-t}^{T-t}R_{XX}(\tau)d\tau dt$$

$$\sigma_{\langle X\rangle}^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)R_{XX}(\tau)d\tau \langle \lim_{T\to\infty}\int_{-2T}^{27}\left|R_{XX}(\tau)\right|d\tau$$

La variance tend vers zéro si :

$$R_{XX}(0)\langle\infty \qquad et \qquad \lim_{|\tau|\to\infty}R_{XX}(\tau) = 0 \qquad et \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\left|R_{XX}(\tau)\right|d\tau\langle\infty$$

En conséquence, si nous avons ces conditions, alors le processus est ergodique en moyenne.

Dans le cas discret, nous aurons ergodicité en moyenne si :

$$EX = \langle X \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} X_n \quad p.s \quad \textit{avec la même condition sur la variance}$$

$$\sigma^2_{\langle X \rangle} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|n|}{2N}\right) R_{XX}(n) \ \langle \ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-2N}^{2N} |R_{XX}(n)|)$$

Ergodisme du 2ième ordre ou en correlation

Un processus est dit ergodique du $2^{\text{ième}}$ ordre ou ergodique en correlation si et seulement si :

$$R_{XX}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)X(t-\tau)dt \quad \textit{ou en discret}$$

$$R_{XX}(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} X(n)X(n-k)$$

Bibliographie

-Distributions et Transformée de Fourier
Ed McGraw-Hill par F.Roddier
-Probability, Random variables & Random Signal Principles
Ed McGraw-Hill by Peyton Z.Peebles, Jr
-Discrete Stochastic Processes and Optimal Filtering (2^{nd} edition)
Ed Iste- John&Wiley by JC.Bertein and R.Ceschi
-http://ocw.mit.edu/OcwWeb/web/courses/courses/index.htm
Cours de “Electrical Engineering and Computer Science” et cours de “Economics”